

問題1 良いやり方を思い付きませんでした。不格好ですが、次のようにやりました。

与式は $m^4 + 5m^2 = m^2(m^2 + 5)$ と因数分解できますが、次ページの補足に示すように、 $m^2$ と $2m + 1$ は互いに素です。なので、 $2m + 1$ で割り切れるのは、 $m^2 + 5$ ということになります。つまり、適当な整数 $k$ が存在して、

$$m^2 + 5 = k(2m + 1)$$

と表すことができます。上式を $m$ について解くと、

$$m = k \pm \sqrt{k^2 + k - 5}$$

となりますが、 $m$ は整数なので、 $\sqrt{\quad}$ の中はある整数 $n$ の平方でなければなりません。よって、

$$k^2 + k - 5 = n^2 \Rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow (2k - 2n + 1)(2k + 2n + 1) = 21$$

です。右辺は2つの整数の積なので、 $21 = p \cdot q$ と考えれば、

$$\begin{cases} 2k - 2n + 1 = p \\ 2k + 2n + 1 = q \end{cases}$$

と表現できます。これを $k, n$ について解くと、

$$(k, n) = \left(\frac{q + p - 2}{4}, \frac{p - q}{4}\right)$$

となります。 $p, q$ の組み合わせは、次の8通りです。

$$(p, q) = (21, 1), (7, 3), (3, 7), (1, 21), (-21, -1), (-7, -3), (-3, -7), (-1, -21)$$

このとき、 $k$ は、

$$k = 5, 2, -3, -6$$

となり、求める $m$ は

$$m = -11, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 10$$

です。

問題1の補足  $m^2$ と $2m + 1$ が互いに素であることの証明

背理法で証明します。互いに素でないと仮定すると、公約数 $d > 1$ が存在して、適当な正の整数 $t, s$ を用いて、

$$m^2 = td$$

$$2m + 1 = sd \Rightarrow m = \frac{sd - 1}{2}$$

と表すことができます。 $m$ を消去すると、

$$\left(\frac{sd - 1}{2}\right)^2 = td \Rightarrow d(4t - s^2d + 2s) = 1$$

となります。 $t, s$ が整数なので、 $d > 1$ なら右辺 = 1にはなりません。これは矛盾なので、冒頭の仮定 $d > 1$ が誤っていたこととなります。よって、 $m^2$ と $2m + 1$ は互いに素です。

問題2

(1)  $z$ の極形式は、

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \cdots \textcircled{1}$$

なので、ドモアブルの定理を使って、

$$z^3 = \{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \cdots \textcircled{2}$$

と表すことができます。一方、 $-i$ を極形式で表すと、

$$-i = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \cdots \textcircled{3}$$

です。②③を比較して、

$$r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$3\theta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k}{3}\pi \quad (k \text{ は整数})$$

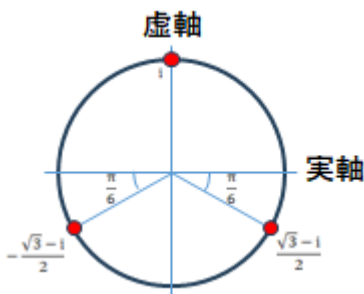
となるので、これを①に代入すると、

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k}{3}\pi\right)$$

となります。これを $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で求めればよいので、

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

です。これらを①に代入すると、



$$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$$

$$\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

となります。よって、求める解は $i, \frac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$ です。

(2) (1)と同様に、 $z^{100}$ を極形式で表すと、

$$z^{100} = r^{100}(\cos 100\theta + i \sin 100\theta) \cdots \textcircled{4}$$

です。④③を比較して、

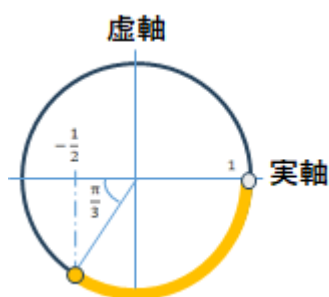
$$r^{100} = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$100\theta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{3}{200}\pi + \frac{k}{50}\pi \quad (k \text{ は整数})$$

となるので、これを①に代入すると、

$$z = \cos\left(\frac{3}{200}\pi + \frac{k}{50}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{200}\pi + \frac{k}{50}\pi\right)$$

となります。



$z$ は左図の円周上の点ですが、実数部  $\geq -\frac{1}{2}$ , 虚数部  $< 0$  のオレンジの弧上にあればよいので、

$$\frac{4}{3}\pi < \frac{3}{200}\pi + \frac{k}{50}\pi < 2\pi \Rightarrow \frac{791}{12} < k < \frac{397}{4} \Rightarrow 66 \leq k \leq 99$$

を満たします。その個数は  $99 - 66 + 1 = 34$  個です。

追加問題1 基本的には重複組み合わせで考えます。まずは、展開項を $(x^0)^p, (x^{11})^q, (x^{23})^r$ と捉えて、 $p + q + r = 2024, p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$ を満たす組の個数を求めると、

$$H(3, 2024) = \binom{3 + 2024 - 1}{3} = \binom{2026}{3}$$

です。ところが、 $n = p + q + r$ としたとき、 $n = 23$ の場合は、 $(x^{11})^0 \cdot (x^{23})^{11}$ と $(x^{11})^{23} \cdot (x^{23})^0$ は項数をダブルカウントしているため、1個減じておかなければなりません。 $n = 24$ の場合は、それに加えて $(x^{11})^0 \cdot (x^{23})^{12}$ と $(x^{11})^{23} \cdot (x^{23})^1$ をダブルカウントしています。以降、 $n = 2024$ までダブルカウントされる項が一つずつ増えていくので、

$$\binom{2026}{3} - \sum_{i=23}^{2024} (i - 22) = 46322$$

です。よって、求める項数は46322個です。

追加問題3 与式は値を持っている思うので、それをxとします。

$$x = \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{\dots}}}}$$

両辺を二乗すると、

$$x^2 = 2024^2 - 2024 + \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{\dots}}}$$

$$= 2024^2 - 2024 + x \Rightarrow (x - 2024)(x + 2023) = 0$$

$x > 0$ なので、 $x = 2024$ です。よって、与式 = 2024です。

追加問題4 年賀はがきn枚の中に当たりが含まれている確率Pは、

$$P = 1 - \text{はずれ}^n = 1 - (1 - \text{あたり})^n = 1 - \left(1 - \frac{3}{100}\right)^n$$

です。 $P \geq \frac{1}{2}$ なので、

$$1 - \left(1 - \frac{3}{100}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \left(\frac{97}{100}\right)^n \Rightarrow n \geq \log_{\frac{97}{100}} \frac{1}{2}$$

です。ここで、

$$\log_{\frac{97}{100}} \frac{1}{2} = \frac{\log_{10} \frac{1}{2}}{\log_{10} \frac{97}{100}} = \frac{\log_{10} \frac{1}{2}}{\log_{10} \frac{9.7}{10}} = \frac{\log_{10} 1 - \log_{10} 2}{\log_{10} 9.7 - \log_{10} 10} = \frac{0 - 0.3010}{0.9868 - 1} = 22.80 \dots$$

なので、 $n = 23$ です。よって、年賀はがきは23枚必要です。