問題1　良いやり方を思い付きませんでした。不格好ですが、次のようにやりました。
与式は$m^4+5m^2=m^2(m^2+5)$と因数分解できますが、次ページの補足に示すように、m^2と$2m+1$は互いに素です。なので、$2m+1$で割り切れるのは、m^2+5ということになります。つまり、適当な整数kが存在して、

$$m^2+5=k(2m+1)$$

と表すことができます。上式をmについて解くと、

$$m=k\pm\sqrt{k^2+k-5}$$

となりますが、mは整数なので、$\sqrt{\ }$の中はある整数nの平方でなければなりません。よって、

$$k^2+k-5=n^2\Rightarrow\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-n^2=\frac{21}{4}\Rightarrow(2k-2n+1)(2k+2n+1)=21$$

です。右辺は 2 つの整数の積なので、$21=p\cdot q$と考えれば、

$$\begin{cases}2k-2n+1=p\\2k+2n+1=q\end{cases}$$

と表現できます。これをk,nについて解くと、

$$(k,n)=\left(\frac{q+p-2}{4},\frac{p-q}{4}\right)$$

となります。p,qの組み合わせは、次の 8 通りです。

$$(p,q)=(21,1),(7,3),(3,7),(1,21),(-21,-1),(-7,-3),(-3,-7),(-1,-21)$$

このとき、kは、

$$k=5,2,-3-6$$

となり、求めるmは

$$m=-11,-4,-2,-1,0,1,3,10$$

です。

問題1の補足　m^2と$2m+1$が互いに素であることの証明
背理法で証明します。互いに素でないと仮定すると、公約数$d>1$が存在して、適当な正の整数t, sを用いて、

$$m^2 = td$$

$$2m+1 = sd \Rightarrow m = \frac{sd-1}{2}$$

と表すことができます。mを消去すると、

$$\left(\frac{sd-1}{2}\right)^2 = td \Rightarrow d(4t - s^2d + 2s) = 1$$

となります。t, sが整数なので、$d>1$なら右辺$=1$にはなりません。これは矛盾なので、冒頭の仮定$d>1$が誤っていたことになります。よって、m^2と$2m+1$は互いに素です。

問題2

(1) zの極形式は、

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \cdots ①$$

なので、ドモアブルの定理を使って、

$$z^3 = \{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\}^3 = r^3(\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta) \cdots ②$$

と表すことができます。一方、$-i$を極形式で表すと、

$$-i = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi \cdots ③$$

です。②③を比較して、

$$r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$3\vartheta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k}{3}\pi \quad (k\text{は整数})$$

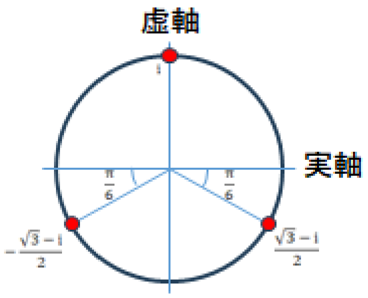
となるので、これを①に代入すると、

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k}{3}\pi\right)$$

となります。これを$0 \leq \vartheta < 2\pi$の範囲で求めればよいので、

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

です。これらを①に代入すると、



$$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$$

$$\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

となります。よって、求める解は$i, \frac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$です。

(2) (1)と同様に、z^{100}を極形式で表すと、

$$z^{100} = r^{100}(\cos 100\vartheta + \sin 100\vartheta) \cdots ④$$

です。④③を比較して、

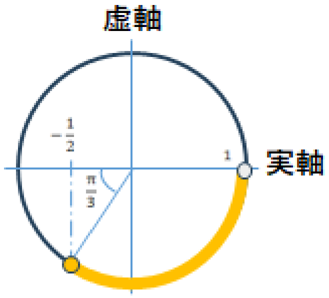
$$r^{100} = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$100\vartheta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Rightarrow \vartheta = \frac{3}{200}\pi + \frac{k}{50}\pi \quad (k\text{は整数})$$

となるので、これを①に代入すると、

$$z = \cos\left(\frac{3}{200}\pi + \frac{k}{50}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{200}\pi + \frac{k}{50}\pi\right)$$

となります。



zは左図の円周上の点ですが、実数部 $\geq -\frac{1}{2}$,虚数部 < 0のオレンジの弧上にあればよいので、

$$\frac{4}{3}\pi < \frac{3}{200}\pi + \frac{k}{50}\pi < 2\pi \Rightarrow \frac{791}{12} < k < \frac{397}{4} \Rightarrow 66 \leq k \leq 99$$

を満たします。その個数は$99 - 66 + 1 = 34$個です。

追加問題1　基本的には重複組み合わせで考えます。まずは、展開項を$(x^0)^p, (x^{11})^q, (x^{23})^r$と捉えて、$p+q+r=2024, p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$を満たす組の個数を求めると、

$$H(3,2024) = \binom{3+2024-1}{3} = \binom{2026}{3}$$

です。ところが、$n=p+q+r$としたとき、$n=23$の場合は、$(x^{11})^0 \cdot (x^{23})^{11}$と$(x^{11})^{23} \cdot (x^{23})^0$は項数をダブルカウントしているので、1　個減じておかなければなりません。$n=24$の場合は、それに加えて$(x^{11})^0 \cdot (x^{23})^{12}$と$(x^{11})^{23} \cdot (x^{23})^1$をダブルカウントしています。以降、$n=2024$までダブルカウントされる項が一つずつ増えていくので、

$$\binom{2026}{3} - \sum_{i=23}^{2024} (i-22) = 46322$$

です。よって、求める項数は46322個です。

追加問題2 2024/01/16 追記

小数第 1013 位に誤差が現れないような近似式を導き出してアプローチします。与式に含まれる2024には、偶数であることを除けば、あまり意味がないと思いますので、$n = 2m$(m は自然数)として、$\sqrt{1_{(2m)}}$で考えます。すると、$\sqrt{\ }$の中は等比数列の和になっていますから、

$$\sqrt{1_{(2m)}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{2m} 10^i} = \sqrt{\frac{10^{2m}-1}{10-1}} = \frac{10^m}{3}\sqrt{1-\frac{1}{10^{2m}}} \cdots ①$$

となります。一方、$\sqrt{1-x}$を0の近傍に Taylor 展開すると、

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots$$

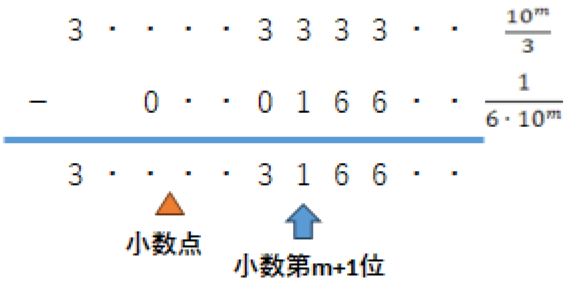
ですが、これを①式に適用すると、

$$\frac{10^m}{3}\sqrt{1-\frac{1}{10^{2m}}} = \frac{10^m}{3}\left\{1 - \frac{\frac{1}{10^{2m}}}{2} - \frac{\left(\frac{1}{10^{2m}}\right)^2}{8} - \cdots\right\}$$

となりますが、3項目以降は$\frac{1}{10^{2m}}$より高位の無限小なので、無視しても差し支えありません。結局、

$$\sqrt{1_{(2m)}} \approx \frac{10^m}{3}\left(1 - \frac{\frac{1}{10^{2m}}}{2}\right) = \frac{10^m}{3} - \frac{1}{6 \cdot 10^m}$$

と近似できます。上の引き算は図示すると、わかりやすいです。



これに問題文の数値を当てはめて、$n = 2m = 2024 \Rightarrow m + 1 = 1013$なので、小数第 1013 位は1です。

追加問題3　与式は値を持っている思うので、それをxとします。

$$x = \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{\cdots}}}}$$

両辺を二乗すると、

$$x^2 = 2024^2 - 2024 + \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{2024^2 - 2024 + \sqrt{\cdots}}}$$

$$= 2024^2 - 2024 + x \Rightarrow (x - 2024)(x + 2023) = 0$$

$x > 0$なので、$x = 2024$です。よって、与式 $= 2024$です。

追加問題4　年賀はがきn枚の中に当たりが含まれている確率Pは、

$$P = 1 - \text{はずれ}^n = 1 - (1 - \text{あたり})^n = 1 - \left(1 - \frac{3}{100}\right)^n$$

です。$P \geq \frac{1}{2}$なので、

$$1 - \left(1 - \frac{3}{100}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \left(\frac{97}{100}\right)^n \Rightarrow n \geq \log_{\frac{97}{100}} \frac{1}{2}$$

です。ここで、

$$\log_{\frac{97}{100}} \frac{1}{2} = \frac{\log_{10} \frac{1}{2}}{\log_{10} \frac{97}{100}} = \frac{\log_{10} \frac{1}{2}}{\log_{10} \frac{9.7}{10}} = \frac{\log_{10} 1 - \log_{10} 2}{\log_{10} 9.7 - \log_{10} 10} = \frac{0 - 0.3010}{0.9868 - 1} = 22.80 \cdots$$

なので、$n = 23$です。よって、年賀はがきは23枚必要です。