● 問題 435 解答＜三角定規＞

［問題１］

題意より a を整数として　$m^4+5m^2=m^2(m^2+5)=a(2m+1)$　…①

m と $2m+1$ は互いに素だから，b を整数として　$m^2+5=b(2m+1)$　…②

$\therefore\ m^2-2bm-b+5=0,\quad m=b\pm\sqrt{b^2+b-5}$　…③

m は整数だから，c を整数として　$b^2+b-5=c^2$　$\therefore\ b=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(c^2+5)}}{2}$　…④

b は整数だから，d を整数 $(\geqq 0)$ として　$1+4(c^2+5)=4c^2+21=d^2$

であることが必要で，　$d^2-4c^2=(d+2c)(d-2c)=21$

$\therefore\ (d+2c,\ d-2c)=(7,\ 3),\ (21,\ 1),\quad \therefore\ d=5,\ 11$

(ⅰ) $d=5$ のとき　④に戻して，$b=2,\ -3$, これらを③に戻して，$m=3,\ 1,\ -2,\ -4$

(ⅱ) $d=11$ のとき　④に戻して，$b=5,\ -6$, これらを③に戻して，$m=10,\ 0,\ -1,\ -11$

以上より，題意を満たす整数 m は，$m=\mathbf{-11,\ -4,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 10}$　…[答]

［問題２］

(1) $z^3=-1=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi\right)\quad (n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore\ z=\left\{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi\right)\right\}^{1/3}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2n\pi}{3}\right)\quad (n=0,1,2)$

$=\ \boldsymbol{i},\ \pm\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}$　…[答]

(2) $z^{100}=-1,\ \therefore\ z=\cos\left(\dfrac{3\pi}{200}+\dfrac{n\pi}{50}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{200}+\dfrac{n\pi}{50}\right)\quad (n=0,1,2,\cdots)$

題意より　$\dfrac{4\pi}{3}\leqq\dfrac{3\pi}{200}+\dfrac{n\pi}{50}<2\pi,\quad \therefore\ \dfrac{800}{3}-3\leqq 4n<400-3$

$\therefore\ 65.9\cdots\leqq n<99.25,\quad 66\leqq n\leqq 99$，よって求める z の個数は **34** …[答]

《追加問題》

［問題３］

$\sqrt{2024^2-2024+\sqrt{2024^2-2024+\sqrt{\cdots}}}$

与式の値を a とおくと，式の形から　$a=\sqrt{2024^2-2024+a}$，$a>0$

$\therefore\ a^2-2024^2-(a-2024)=(a-2024)(a+2023)=0$

$a>0$ より　$a=\mathbf{2024}$　…[答]

［問題４］

n 枚購入して全てがハズレる確率は 0.97^n だから，題意より　$0.97^n<\dfrac{1}{2}$

両辺の対数をとり　$n\log\left(\dfrac{9.7}{10}\right)<\log\left(\dfrac{1}{2}\right)\quad \therefore\ n(0.9868-1)<-0.3010$

$\therefore\ n>\dfrac{0.3010}{1-0.9868}=22.8\cdots$

以上より，**23 枚** 以上購入要　…[答]