第 436 回

問題

(1)　$x>0$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x}$ の最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ。

(2)　$x>0$ のとき，$x^3+\dfrac{1}{x}$ の最小値と，そのときの $x$ の値を求めよ。

(3)　$x>0$，$y>0$ のとき，$x+y+\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{1}{2xy}$ の最小値と，そのときの $x$, $y$ の値を求めよ。

(4)　$x>0$，$y>0$，$z>0$ で $x+y+z=1$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ の最小値と，そのときの $x$, $y$, $z$ の値を求めよ。

解答　$a_k>0$（$k=1, 2, \cdots, n$）に対して，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ を相加平均，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ を相乗平均といい，

相加平均≧相乗平均である。（等号は，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき）<証明略>

なお，$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ として使われることもある。

(1)　$x>0$ のとき，$x^2>0$，$\dfrac{1}{2x}>0$ であるから，相加平均≧相乗平均より，

$$x^2+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\geqq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\quad(\text{最小値})$$

等号は $x^2=\dfrac{1}{2x}$ のとき，i.e. $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき。

(2)　$x>0$ のとき，$x^3>0$，$\dfrac{1}{3x}>0$ であるから，相加平均≧相乗平均より，

$$x^3+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}\geqq 4\sqrt[4]{x^3\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}}=\frac{4}{\sqrt[4]{27}}\quad(\text{最小値})$$

等号は $x^3=\dfrac{1}{3x}$ のとき，i.e. $x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ のとき。

(3)　$x>0$，$y>0$ のとき，$\dfrac{x+y}{4}$, $\dfrac{1}{x+y}$, $\dfrac{x}{2}$, $\dfrac{y}{2}$, $\dfrac{1}{2xy}$ はどれも正であるから，相加平均≧相乗平均より，

$$x+y+\frac{2}{x+y}+\frac{1}{2xy}$$

$$=\frac{x+y}{4}+\frac{x+y}{4}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+y}+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{2xy}\geqq 7\sqrt[7]{\left(\frac{x+y}{4}\right)^2\left(\frac{1}{x+y}\right)^2\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2xy}}=\frac{7}{2}\quad(\text{最小値})$$

等号は，$\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2xy}$ のとき，i.e. $x=y=1$ のとき。

(4)　$x>0$，$y>0$，$z>0$ より，$\dfrac{y}{2}>0$，$\dfrac{z}{3}>0$，$\dfrac{1}{x}>0$，$\dfrac{2}{y}>0$，$\dfrac{3}{z}>0$ であるから，

相加平均≧相乗平均より，$1=x+y+z=x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}+\dfrac{z}{3}+\dfrac{z}{3}\geqq 6\sqrt[6]{x\left(\dfrac{y}{2}\right)^2\left(\dfrac{z}{3}\right)^3}$　…①

同様に，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}+\dfrac{3}{z}+\dfrac{3}{z}\geqq 6\sqrt[6]{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{y}\right)^2\left(\dfrac{3}{z}\right)^3}$　…②

①，②を辺々掛け合わせると，$1\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}\right)\geqq 6^2$　$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}\geqq 36$（最小値）

等号は，①は，$x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ のとき。②は，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{y}=\dfrac{3}{z}$ のとき。ともに，$y=2x$，$z=3x$ のときである。

$x+y+z=1$ であるから，$x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき。

別解　コーシー・シュワルツの不等式から，$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}\right)\geqq\left(\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{z}}\right)^2=6^2$

$x+y+z=1$ より，$\therefore\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}\geqq 36$（最小値）

等号は，$x+y+z=1$ で，

$\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\frac{2}{\sqrt{y}}}=\dfrac{\sqrt{z}}{\frac{3}{\sqrt{z}}}$ のとき，$i.e.\ x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ のときであるから，$x=\dfrac{1}{6}$，$y=\dfrac{1}{3}$，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき。

追加問題1

$\begin{cases}(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)(x_4+1)=2024\\(x_1+2)(x_2+2)(x_3+2)(x_4+2)=2025\\(x_1+3)(x_2+3)(x_3+3)(x_4+3)=2026\\(x_1+4)(x_2+4)(x_3+4)(x_4+4)=2027\end{cases}$ のとき，$(x_1+5)(x_2+5)(x_3+5)(x_4+5)$ の値を求めよ。

解答

$\begin{cases}(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)(x_4+1)=a\\(x_1+2)(x_2+2)(x_3+2)(x_4+2)=b\\(x_1+3)(x_2+3)(x_3+3)(x_4+3)=c\\(x_1+4)(x_2+4)(x_3+4)(x_4+4)=d\end{cases}$ とおいて考える。

$(x_1+n)(x_2+n)(x_3+n)(x_4+n)=a_n$ とおくと，$a_n$ は $n$ について4次式で，$n^4$ の係数は1であるから，

$a_n=n^4+pn^3+qn^2+rn+s$ とおける。

$a_1=1+p+q+r+s=a$

$a_2=16+8p+4q+2r+s=b$

$a_3=81+27p+9q+3r+s=c$

$a_4=256+64p+16q+4r+s=d$ であるから，$p$，$q$，$r$，$s$ について連立させて解くと，

$p=\dfrac{-a+3b-3c+d-60}{6}$，$q=\dfrac{3a-8b+7c-2d}{2}$，$r=\dfrac{-26a+57b-42c+11d-300}{6}$，

$s=4a-6b+4c-d+24$

このとき，

$a_n=n^4+\dfrac{-a+3b-3c+d-60}{6}n^3+\dfrac{3a-8b+7c-2d}{2}n^2+\dfrac{-26a+57b-42c+11d-300}{6}n+4a-6b$

$+4c-d+24$ となる。

与えられた問題では，$b=a+1$，$c=a+2$，$d=a+3$ であるから，

$a_n=n^4-10n^3+35n^2-49n+23+a=(n-1)(n^3-9n^2+26n-23)+a$

最後に，$a=2024$，$n=5$ を代入して，$a_5=4\cdot7+2024=2052$

よって，$(x_1+5)(x_2+5)(x_3+5)(x_4+5)=2052$　答

追加問題2

次の級数の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2023^k\cdot 2024^k}{(2024^k-2023^k)(2024^{k+1}-2023^{k+1})}$$

解答　$2024^k(2024^{k+1}-2023^{k+1})-2024^{k+1}(2024^k-2023^k)=2023^k\cdot 2024^k$ であるから，

$$\text{与式}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2023^k\cdot 2024^k}{(2024^k-2023^k)(2024^{k+1}-2023^{k+1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2024^k}{2024^k-2023^k}-\frac{2024^{k+1}}{2024^{k+1}-2023^{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2024}{2024^1-2023^1}-\frac{2024^{n+1}}{2024^{n+1}-2023^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2024-\frac{1}{1-\left(\frac{2023}{2024}\right)^{n+1}}\right)$$

$$=2024-1=2023$$ 答

追加問題3

$x^3+y^3=6$ を満たす有理数 $(x,\ y)$ の組を1組求めよ。

解答　$x=y$ とおくと，$x^3=3$ となり，$x=\sqrt[3]{3}$ は有理数ではないから，$x\fallingdotseq y$ である。

$a$，$b$，$c$ を自然数とし，$x=\dfrac{b-c}{a}$，$y=\dfrac{b+c}{a}$ とおく。ただし，$\dfrac{b-c}{a}$，$\dfrac{b+c}{a}$ は既約分数とする。

$x^3+y^3=\left(\dfrac{b-c}{a}\right)^3+\left(\dfrac{b+c}{a}\right)^3=\dfrac{2(b^3+3bc^2)}{a^3}=6$ より，$b^3+3bc^2=3a^3$ …①

①で，$3bc^2$，$3a^3$ は3の倍数であるから，$b^3$ も3の倍数である。

$b=3b_1$（$b_1$ は自然数）とおき，①に代入すると，$(3b_1)^3+3\cdot 3b_1c^2=3a^3$　$\therefore 9b_1{}^3+3b_1c^2=a^3$ …②

②で，左辺は3の倍数であるから，$a=3a_1$（$a_1$ は自然数）とおき，②に代入すると，

$9b_1{}^3+3b_1c^2=(3a_1)^3$　$\therefore 3b_1{}^3+b_1c^2=9a_1{}^3$ …③

③で，$3b_1{}^3$，$9a_1{}^3$ は3の倍数であるから，$b_1c^2$ も3の倍数である。

$c$ を3の倍数とすると，$\dfrac{b-c}{a}$，$\dfrac{b+c}{a}$ は既約分数とならない（3で約分できる）から，$c$ は3の倍数ではない。

従って，$b_1=3b_2$（$b_2$ は自然数）とおき，③に代入すると，

$3(3b_2)^3+3b_2\cdot c^2=9a_1{}^3$　$\therefore 27b_2{}^3+b_2c^2=3a_1{}^3$ …④

④で，$27b_2{}^3$，$3a_1{}^3$ は3の倍数であるから，$b_2c^2$ も3の倍数である。

$c$ は3の倍数でないから，$b_2=3b_3$（$b_3$ は自然数）とおき，④に代入すると，

$27(3b_3)^3+3b_3\cdot c^2=3a_1{}^3$　$\therefore 243b_3{}^3+b_3c^2=a_1{}^3$ …⑤

⑤で，左辺は $b_3$ の倍数であるから，$a_1=b_3a_2$（$a_2$ は自然数）とおき，⑤に代入すると，

$243b_3{}^3+b_3c^2=(b_3a_2)^3$　$c^2=b_3{}^2(a_2{}^3-243)$　$c>0$ より，$\therefore c=b_3\sqrt{a_2{}^3-243}$ …⑥

⑥より，$c$ は $b_3$ の倍数となるが，$\dfrac{b-c}{a}$，$\dfrac{b+c}{a}$ は既約分数でなければならないから，$b_3=1$ である。

このとき，⑥より， $c=\sqrt{{a_2}^3-243}$ …⑦

$6^3=216$ ， $7^3=343$ であるから， $a_2 \geqq 7$ である。

$a_2=7$ のとき，⑦より， $c=10$

このとき， $a=3a_1=3b_3a_2=3\cdot1\cdot7=21$ ， $b=3b_1=3^2b_2=3^3b_3=3^3\cdot1=27$ ， $x=\dfrac{27-10}{21}=\dfrac{17}{21}$ ，

$y=\dfrac{27+10}{21}=\dfrac{37}{21}$

よって， $x^3+y^3=6$ を満たす有理数 $(x,\ y)$ の組の1組は， $(x,\ y)=\left(\dfrac{17}{21},\ \dfrac{37}{21}\right)$ 答

補足

[1] $x^3+y^3=6$ は $x$, $y$ の対称式であるから， $x$, $y$ の値を入れ換えた $(x,\ y)=\left(\dfrac{37}{21},\ \dfrac{17}{21}\right)$ も有理数解となる。

[2] 曲線 $x^3+y^3=6$ …(a) の両辺を $x$ で微分すると， $3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}=0$ より， $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2}{y^2}$ であるから，

曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は， $y-y_1=-\dfrac{{x_1}^2}{{y_1}^2}(x-x_1)$ $\therefore\ {x_1}^2x+{y_1}^2y=6$ …(b)

$(x_1,\ y_1)=\left(\dfrac{17}{21},\ \dfrac{37}{21}\right)$ のとき，

(a)，(b) の接点以外の交点は， $\left(-\dfrac{1805723}{960540},\ \dfrac{2237723}{960540}\right)$

$(x_1,\ y_1)=\left(-\dfrac{1805723}{960540},\ \dfrac{2237723}{960540}\right)$ のとき，

(a)，(b) の接点以外の交点は， $\left(\dfrac{2983517129811443394501144\,1}{1641849890114429433751236\,0},\ -\dfrac{1276454530530789553459441}{16418498901144294337512360}\right)$

(2024/2/4　ジョーカー)