問題

(1) 相加相乗平均の関係式を使って、

$$与式 = \mathrm{x}^2 + \frac{1}{2\mathrm{x}} + \frac{1}{2\mathrm{x}} \geq 3\left(\mathrm{x}^2 \cdot \frac{1}{2\mathrm{x}} \cdot \frac{1}{2\mathrm{x}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

となりますが、等号が成り立つのは、

$$\mathrm{x}^2 = \frac{1}{2\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > 0$$

のときなので、$\mathrm{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$のとき最小値$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$です。

(2) 同様にして、

$$与式 = \mathrm{x}^3 + \frac{1}{3\mathrm{x}} + \frac{1}{3\mathrm{x}} + \frac{1}{3\mathrm{x}} \geq 4\left(\mathrm{x}^3 \cdot \frac{1}{3\mathrm{x}} \cdot \frac{1}{3\mathrm{x}} \cdot \frac{1}{3\mathrm{x}}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{\sqrt[4]{27}}$$

等号が成り立つのは、

$$\mathrm{x}^3 = \frac{1}{3\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} > 0$$

のときなので、$\mathrm{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$のとき最小値$\frac{4}{\sqrt[4]{27}}$です。

(3) 相加相乗平均の関係は、$xy \Rightarrow x+y$に変えるために利用しました。最小値は微分で求めました。

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$$

等号は$x=y$のときに成り立ちますが、これを与式に適用すると、

$$x+y+\frac{2}{x+y}+\frac{1}{2yx} \geq x+y+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{(x+y)^2}$$

です。右辺を$x+y=u$として、$f(u)$とします。

$$f(u)=u+\frac{2}{u}+\frac{2}{u^2}$$

これを微分して、

$$f(u)'=-\frac{2}{u^2}-\frac{4}{u^3}+1$$

となって、

$$f(u)'=0 \Rightarrow -\frac{2}{u^2}-\frac{4}{u^3}+1=0 \Rightarrow (u-2)(u^2+2u+2)=0 \Rightarrow u=2$$

です。

u	$\cdots$	2	$\cdots$
$f(u)'$	$-$	0	$+$
$f(u)$	↘	$\frac{7}{2}$	↗

増減表より、$f(u)$は$u=2$で最小値$\frac{7}{2}$を取ることがわかります。このとき、$u=x+y$で$x=y$なので、$x=y=1$です。

以上より、$x=y=1$のとき最小値$\frac{7}{2}$です。

(4) 少々強引ですが、与式に$x+y+z$を乗じて、項数を増やしました（$x+y+z=1$なので、与式の取り得る値に影響しません）。すると、

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)(x+y+z)=\frac{4x}{y}+\frac{9x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{9y}{z}+\frac{4z}{y}+14$$

となるので、定数項以外の次式$F(x,y,z)$を最小にすれば良いのです。

$$F(x,y,z)=\frac{4x}{y}+\frac{9x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{9y}{z}+\frac{4z}{y}$$

相加相乗平均の関係が利用できる形に変形すると、

$$F(x,y,z)=2\times\frac{\frac{4x}{y}}{2}+3\times\frac{\frac{9x}{z}}{3}+2\times\frac{\frac{y}{x}}{2}+3\times\frac{\frac{z}{x}}{3}+6\times\frac{\frac{9y}{z}}{6}+6\times\frac{\frac{4z}{y}}{6}$$

$$=2\times\frac{2x}{y}+3\times\frac{3x}{z}+2\times\frac{y}{2x}+3\times\frac{z}{3x}+6\times\frac{3y}{2z}+6\times\frac{2z}{3y}$$

$$\geq 22\times\left\{\left(\frac{2x}{y}\right)^2\cdot\left(\frac{3x}{z}\right)^3\cdot\left(\frac{y}{2x}\right)^2\cdot\left(\frac{z}{3x}\right)^3\cdot\left(\frac{3y}{2z}\right)^6\cdot\left(\frac{2z}{3y}\right)^6\right\}^{\frac{1}{22}}=22$$

等号は、$\frac{2x}{y}=\frac{3x}{z}=\frac{y}{2x}=\frac{z}{3x}=\frac{3y}{2z}=\frac{2z}{3y}$のときに成り立ち、$x:y:z=1:2:3$ですが、$x+y+z=1$なので、$(x,y,z)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$と一意に定まります。このときの与式の値は、

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=\frac{4x}{y}+\frac{9x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{9y}{z}+\frac{4z}{y}+14\geq 22+14=36$$

です。

以上より、$(x,y,z)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$のとき最小値は36です。

追加問題1　x_1～x_4を求めて計算する問題ではなさそうなので、次のようにやりました。

$z_1 = x_1x_2x_3x_4$

$z_2 = x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3$

$z_3 = x_3x_4 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_1x_3 + x_1x_2$

$z_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

とすると、与式は次のように表せます。

$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + 1 = 2024$

$z_1 + 2z_2 + 4z_3 + 8z_4 + 16 = 2025$

$z_1 + 3z_2 + 9z_3 + 27z_4 + 81 = 2026$

$z_1 + 4z_2 + 16z_3 + 64z_4 + 256 = 2027$

$z_1 + 5z_2 + 25z_3 + 125z_4 + 625 = z$

これらを解いて、

$z_1 = 2047, z_2 = -49, z_3 = 35, z_4 = -10, z = 2052$

です。よって、$(x_1 + 5)(x_2 + 5)(x_3 + 5)(x_4 + 5) = 2052$です。

追加問題2　第n項までの和をS_nとして、部分分数に分けると、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2023^k + 2024^k}{2(2024^k - 2023^k)} - \frac{2023^{k+1} + 2024^{k+1}}{2(2024^{k+1} - 2023^{k+1})}\right\}$$

$$= \frac{2023^1 + 2024^1}{2(2024^1 - 2023^1)} - \frac{2023^{k+1} + 2024^{k+1}}{2(2024^{k+1} - 2023^{k+1})} = \frac{4047}{2} - \frac{1 + \left(\frac{2023}{2024}\right)^{k+1}}{2\left(1 - \left(\frac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right)}$$

となりますから、

$$与式 = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4047}{2} - \frac{1 + \left(\frac{2023}{2024}\right)^{k+1}}{2\left(1 - \left(\frac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right)}\right\} = \frac{4047}{2} - \frac{1}{2} = 2023$$

です。

追加問題 3 与式を満たす有理点を直接求めるのは難しいので、整点を求めて有理点に変換する方法で取り組みました。なお、$x = y$とすると、$x^3 = 3$となり、xが有理数ではなくなります。また、数式がシンメトリなので、$x < y$としておいて構わないでしょう。

さて、求める有理点(x, y)が存在するとして、適当な整数u, v, wを用いて、

$$x = \frac{u}{w}, y = \frac{v}{w}$$

と表現できたとします。ただし、$w \neq 0, u < v$で、uとw、vとwは互いに素です。すると、与式は、

$$\frac{u^3}{w^3} + \frac{v^3}{w^3} = 6 \Rightarrow u^3 + v^3 = 6w^3$$

となります。有理点を1つ求めれば良いので、例えば 40 より小さい素数の中から探したらよいと思います。素数は 12 個しかないので、総当たりが手っ取り早いです。最終ページの表に示した通り、

$(u, v, w) = (17,37,21)$が見かったので、$(x, y) = \left(\frac{17}{21}, \frac{37}{21}\right)$が有理点の1つです。

この点を足掛かりにして、他の有理点も探すことを考えてみました。最初に見つけた有理点から接線を引いて、(接点外の)交点が有理点であることを言えば、有理点を次々に見つけることができます。任意点(x, y)の傾きは、与式を全微分して、

$$x^3 + y^3 = 6 \Rightarrow 3x^2dx + 3y^2dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^2$$

ですから、与式の有理点を$P(s, t)$とすると、その点における接線の方程式は、

$$y - t = -\left(\frac{s}{t}\right)^2 (x - s)$$

です。これと与式を連立させて、交点を求めます。接線の方程式を以下のように変形して、

$$y = t - \left(\frac{s}{t}\right)^2 (x - s) \Rightarrow y = (6 - s^3)^{\frac{1}{3}} - \left\{\frac{s}{(6 - s^3)^{\frac{1}{3}}}\right\}^2 (x - s)$$

これを与式に代入します。

$$x^3 + y^3 = 6 \Rightarrow x^3 + \left[(6 - s^3)^{\frac{1}{3}} - \left\{\frac{s}{(6 - s^3)^{\frac{1}{3}}}\right\}^2 (x - s)\right]^3 = 6$$

$$\Rightarrow \frac{(12s^3 - 36)x^3 - 18s^4x^2 + 108s^2x + 6s^6 - 72s^3}{s^6 - 12s^3 + 36} = 0$$

$$\Rightarrow 6(x - s)^2(2s^3x - 6x + s^4 - 12s) \Rightarrow x = \frac{s(12 - s^3)}{2(s^3 - 3)}$$

与式の対称性から、yはsとtを入れ替えればよいので、結局、

$$(x, y) = \left(\frac{s(12 - s^3)}{2(s^3 - 3)}, \frac{t(12 - t^3)}{2(t^3 - 3)}\right)$$

となります。ここで、s, tは有理数なので、x, yも有理数です。よって、次ページのように、最初に見つけた有理点から他の有理点を次々に見つけることができます。

$\mathbf{x^3 + y^3 = 6}$上の有理点

(17/21,37/21)
(-1805723/960540,2237723/960540)
(2983517129811443394501144 1/16418498901144294337512360,-1276454530530789553459441/16418498901144294337512360)
(79222057266254960819025292611212161768608793943824566580605160862111364183033645044811541952477256 8639/43606684188207111709500245932408516736654334293747734481864619627938530544150686101770194692948 9111120,677959805103821424723263992665061838773573375138707379347061993860933752923568297473185577965 85767361/43606684188207111709500245932408516736654334293747734481864619627938530544150686101770194692 9489111120)
(39439235295298236017752380283339100803802222963955771731193531481674006821407350628616746147077763702342747032966000054163250409976859206560274614003596272662869597248559896061588714525909156313428328547551041942057379184688530235727791369580616210280995564578213942778098375521077289975732099507432982392143362857813734083410319061885908413242444486325703763611142079113609446905023309014634788281685549 6959/2166801595162947508912841852607310761166100392642808230468710201229528683817565517891235876696918478983031336470380621431471085464547463382020101272035434193066616684202431971345089091583974622457952849095992243279224416442569108631161790106740779465754009706153164414574347861036333646133952753750322965902678962678364134647666650374406926290073070653008185437782294928011204779877982291647947850875305 26560,-6743857103562192455961147753986846463321668985937528503700879871577620184337378316466232575894617978406442741616415899207578252934635796523594974694345233878028438035750071381776162595732896284223734680626795622687601908544420490894279297317335898083712949646157655784453421553651587734698107434155803596974104942787763583777513156777014923303783808421659983529916402868775896306648565129949245364122362495 9/21668015951629475089128418526073107611661003926428082304687102012295286838175655178912358766969184789830313364703806214314710854645474633820201012720354341930666166842024319713450890915839746224579528490959922432792244164425691086311617901067407794657540097061531644145743478610363336461339527537503229659026789626783641346476666503744069262900730706530081854377822949280112047798779822916479478508753052 6560)

$\mathbf{u^3 + v^3 = 6w^3}$を満たす素数組の検索

u	v	$\frac{u^3+v^3}{6}$	w^3
2	3	35/6	×
	5	133/6	×
	7	117/2	×
	11	1339/6	×
	13	735/2	×
	17	4921/6	×
	19	2289/2	×
	23	12175/6	×
	29	24397/6	×
	31	9933/2	×
	37	16887/2	×
3	5	76/3	×
	7	185/3	×
	11	679/3	×
	13	1112/3	×
	17	2470/3	×
	19	3443/3	×
	23	6097/3	×
	29	12208/3	×
	31	14909/3	×
	37	25340/3	×

u	v	$\frac{u^3+v^3}{6}$	w^3
5	7	78	×
	11	728/3	×
	13	387	×
	17	2519/3	×
	19	1164	×
	23	6146/3	×
	29	12257/3	×
	31	4986	×
	37	8463	×
7	11	279	×
	13	1270/3	×
	17	876	×
	19	3601/3	×
	23	2085	×
	29	4122	×
	31	15067/3	×
	37	25498/3	×
11	13	588	×
	17	3122/3	×
	19	1365	×
	23	6749/3	×
	29	12860/3	×
	31	5187	×
	37	8664	×

u	v	$\frac{u^3+v^3}{6}$	w^3
13	17	1185	×
	19	4528/3	×
	23	2394	×
	29	4431	×
	31	15994/3	×
	37	26425/3	×
17	19	1962	×
	23	8540/3	×
	29	14651/3	×
	31	5784	×
	37	9261	21^3
19	23	3171	×
	29	5208	×
	31	18325/3	×
	37	28756/3	×
23	29	18278/3	×
	31	6993	×
	37	10470	×
29	31	9030	×
	37	12507	×
31	37	40222/3	×