第 436 回　よふかしのつらいおじさん

問題

(1)最小値は、

$$x^2+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

そのときの x は、

$$x^2=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x}\ \rightarrow\ 2x^3=1\ \rightarrow\ x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

(2) 最小値は、

$$x^3+\frac{1}{x}=x^3+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}\geq 4\sqrt[4]{x^3\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}}=4\sqrt[4]{\frac{1}{27}}=\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}$$

そのときの x は、

$$x^3=\frac{1}{3x}=\frac{1}{3x}=\frac{1}{3x}\ \rightarrow\ 3x^4=1\ \rightarrow\ x=\frac{\sqrt[4]{27}}{3}$$

(3) 最小値は、

$$x+y+\frac{2}{x+y}+\frac{1}{2xy}=\left(\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y}\right)+\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2xy}\geq\left(2\sqrt{\frac{x+y}{2}\cdot\frac{2}{x+y}}\right)+\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2xy}$$

$$=(2)+\left\{\frac{x+y}{2}\right\}+\frac{1}{2xy}\geq 2+\left\{\sqrt{xy}\right\}+\frac{1}{2xy}=2+\left[\frac{\sqrt{xy}}{2}+\frac{\sqrt{xy}}{2}+\frac{1}{2xy}\right]\geq 2+\left[3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{xy}}{2}\cdot\frac{\sqrt{xy}}{2}\cdot\frac{1}{2xy}}\right]$$

$$=2+3\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

等号が成立するときの条件は、

(　)の部分　$\rightarrow\ \frac{x+y}{2}=\frac{2}{x+y}\ \rightarrow\ (x+y)^2=4\ \rightarrow\ x+y=2$

{　}の部分　$\rightarrow\ x=y$

[　]の部分　$\rightarrow\ \frac{\sqrt{xy}}{2}=\frac{\sqrt{xy}}{2}=\frac{1}{2xy}\ \rightarrow\ \left(\sqrt{xy}\right)^3=1\ \rightarrow\ xy=1$

以上から、

$$\begin{cases}x+y=2\\ x=y\\ xy=1\end{cases}\ \rightarrow\ x=y=1$$

(4) 最小値は、

$x+y+z=1$ なので、

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)(x+y+z)=1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{4x}{y}+4+\frac{4z}{y}+\frac{9x}{z}+\frac{9y}{z}+9$$

$$=14+\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left\{\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right\}+\left[\frac{9x}{z}+\frac{z}{x}\right]$$

$$\geq 14+\left(2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}\right)+\left\{2\sqrt{\frac{4z}{y}\cdot\frac{9y}{z}}\right\}+\left[2\sqrt{\frac{9x}{z}\cdot\frac{z}{x}}\right]=14+4+12+6=36$$

等号が成立するときの条件は、

( )の部分 → $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$ → $y^2=4x^2$ → $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$

{ }の部分 → $\frac{4z}{y}=\frac{9y}{z}$ → $4z^2=9y^2$ → $\frac{y}{z}=\frac{2}{3}$

[ ]の部分 → $\frac{9x}{z}=\frac{z}{x}$ → $9x^2=z^2$ → $\frac{z}{x}=\frac{3}{1}$

以上から、

$x:y:z=1:2:3=k:2k:3k$ → $x+y+z=k+2k+3k=6k=1$ → $k=\frac{1}{6}$

→ $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{2}$

追加問題

問題 1

$(x_1+n)(x_2+n)(x_3+n)(x_4+n)$

$$=n^4+(x_1+x_2+x_3+x_4)n^3+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)n^2$$
$$+(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)n+(x_1x_2x_3x_4)$$

$=n^4+X_1n^3+X_2n^2+X_3n+X_4$ ⋯ (a) とおきます。

$n=4$ → $256+64X_1+16X_2+4X_3+X_4=2027$

$n=3$ → $81+27X_1+9X_2+3X_3+X_4=2026$

$n=2$ → $16+8X_1+4X_2+2X_3+X_4=2025$

$n=1$ → $1+X_1+X_2+X_3+X_4=2024$ ⋯ (b)

上の式から下の式を引くと順に、

$175 + 37X_1 + 7X_2 + X_3 = 1$
$65 + 19X_1 + 5X_2 + X_3 = 1$
$15 + 7X_1 + 3X_2 + X_3 = 1 \quad \cdots \quad (c)$

上の式から下の式を引くと順に、

$110 + 18X_1 + 2X_2 = 0$
$50 + 12X_1 + 2X_2 = 0 \quad \cdots \quad (d)$

上の式から下の式を引くと、

$60 + 6X_1 = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = -10$

(d) に代入して、$50 + 12 \times (-10) + 2X_2 = 0 \quad \rightarrow \quad X_2 = 35$

(c) に代入して、$15 + 7 \times (-10) + 3 \times (35) + X_3 = 1 \quad \rightarrow \quad X_3 = -49$

(b) に代入して、$1 + (-10) + (35) + (-49) + X_4 = 2024 \quad \rightarrow \quad X_4 = 2047$

$n = 5$ として (a) に代入すると、

$5^4 + (-10) \times 5^3 + (35) \times 5^2 + (-49) \times 5 + (2047) = 2052$

問題 2

● 先ず、与えられた式は、差の形に変形できます。

$$\frac{2023^k \cdot 2024^k}{(2024^k - 2023^k)(2024^{k+1} - 2023^{k+1})} = \frac{2023^k \cdot 2024^k \cdot (2024 - 2023)}{(2024^k - 2023^k)(2024^{k+1} - 2023^{k+1})}$$

$$= \frac{2023^k \cdot 2024^{k+1} - 2023^{k+1} \cdot 2024^k}{(2024^k - 2023^k)(2024^{k+1} - 2023^{k+1})}$$

$$= \frac{2023^k \cdot 2024^{k+1} - 2023^k \cdot 2023^{k+1} - 2023^{k+1} \cdot 2024^k + 2023^k \cdot 2023^{k+1}}{(2024^k - 2023^k)(2024^{k+1} - 2023^{k+1})}$$

$$= \frac{2023^k(2024^{k+1} - 2023^{k+1}) - 2023^{k+1}(2024^k - 2023^k)}{(2024^k - 2023^k)(2024^{k+1} - 2023^{k+1})}$$

$$= \frac{2023^k}{2024^k - 2023^k} - \frac{2023^{k+1}}{2024^{k+1} - 2023^{k+1}}$$

●次に、k が 1 増加すると、与えられた式の合値は減少しますが、0 以下にはなりません。

$$\frac{2023^k\cdot 2024^k}{(2024^k-2023^k)(2024^{k+1}-2023^{k+1})}=\frac{2023^k\cdot\dfrac{2024^k}{(2024^k\cdot 2024^{k+1})}}{\dfrac{(2024^k-2023^k)(2024^{k+1}-2023^{k+1})}{(2024^k\cdot 2024^{k+1})}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2024}\cdot\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k}{\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k\right\}\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right\}}$$

この形でｋ番目と(ｋ+1)番目の差をとってみます。

$$\frac{\dfrac{1}{2024}\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k}{\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k\right\}\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right\}}-\frac{\dfrac{1}{2024}\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}}{\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right\}\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+2}\right\}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2024}\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k}{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}}\left[\frac{1}{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k}-\frac{\dfrac{2023}{2024}}{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+2}}\right]$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2024}\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k}{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}}\times\frac{\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+2}\right\}-\dfrac{2023}{2024}\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k\right\}}{\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right\}\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+2}\right\}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2024}\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k}{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}}\times\frac{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+2}-\dfrac{2023}{2024}-\dfrac{2023}{2024}\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k}{\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right\}\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+2}\right\}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2024}\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k}{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}}\times\frac{1-\dfrac{2023}{2024}+\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\left(1-\dfrac{2023}{2024}\right)}{\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right\}\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+2}\right\}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1}{2024}\right)\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^k}{\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right\}}\times\frac{\left(1-\dfrac{2023}{2024}\right)\left\{1+\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right\}}{\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+1}\right\}\left\{1-\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{k+2}\right\}}>0$$

よって収束します。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2023^k\cdot 2024^k}{(2024^k-2023^k)(2024^{k+1}-2023^{k+1})}$$

$$=\left(\frac{2023^1}{2024^1-2023^1}-\frac{2023^2}{2024^2-2023^2}\right)+\left(\frac{2023^2}{2024^2-2023^2}-\frac{2023^3}{2024^3-2023^3}\right)+\cdots$$

$$=2023$$

問題 3

● a、b、c を整数として次の式を考えます。

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 = 6$$

分母を払い分子を因数分解します。

$(b+c)(b^2-bc+c^2) = 6a^3 \quad \cdots \quad$ (イ)

● 因数の割り振りを考えます。

$(b+c) = 1,\ a,\ a^2,\ a^3$
$(b+c) = 2,\ 2a,\ 2a^2,\ 2a^3$
$(b+c) = 3,\ 3a,\ 3a^2,\ 3a^3$
$(b+c) = 6,\ 6a,\ 6a^2,\ 6a^3$
上の 16 通りの場合は、どれもうまくいきません。

●そこで、もう少し緩やかに、先ず $(b+c) = 2p$（偶数)としてみます。

$c = 2p - b$ なので、

$b^2 - bc + c^2 = b^2 - b(2p-b) + (2p-b)^2 = 3b^2 - 6pb + 4p^2 = 3(b^2 - 2pb) + 4p^2$

$b^2 - bc + c^2$ に 3 の因数があるためには、$4p^2$ の部分に 3 の因数がなければなりません。

つまり、p に 3 が含まれていることになります。

すると $(b+c)$ が、6 の倍数になってしまいます。

●そこで、改めて $(b+c) = 6p$ として始めます。

$c = 6p - b$ なので、

$b^2 - bc + c^2 = b^2 - b(6p-b) + (6p-b)^2 = 3b^2 - 18pb + 36p^2 = 3(b^2 - 6pb + 12p^2)$

これらの式の情報を式（イ）にもどすと、

$(b+c)(b^2-bc+c^2) = 6a^3 \quad \rightarrow \quad 6p \times 3(b^2 - 6pb + 12p^2) = 6a^3$

$\rightarrow \quad 3p(b^2 - 6pb + 12p^2) = a^3 \quad \cdots \quad$ (ロ)

上の式より、$a = 3q$（3 の倍数)とします。

(ロ)に代入して、

$3p(b^2 - 9pb + 12p^2) = a^3 \quad \rightarrow \quad 3p(b^2 - 6pb + 12p^2) = 27q^3$

$\rightarrow \quad p(b^2 - 6pb + 12p^2) = 9q^3 \quad \cdots \quad$ (ハ)

ここで、運に期待して、$p = 9$ としてみます。

(ハ)に代入して、

$p(b^2 - 9pb + 12p^2) = 9q^3 \quad \rightarrow \quad b^2 - 6 \times 9 \times b + 12 \times 9^2 - q^3 = 0$

$\rightarrow\ b^2 - 2\times 27b + 972 - q^3 = 0 \quad \rightarrow\ b = 27 \pm \sqrt{27^2 - (972 - q^3)} = 27 \pm \sqrt{q^3 - 243}$

ここで、$q = 7$ とすると、$b = 27 \pm \sqrt{7^3 - 243} = 27 \pm \sqrt{343 - 243} = 27 \pm \sqrt{100}$

$= 27 \pm 10 = 37,\ 17$（一方が c ）

以上から、$a = 3q = 3\times 7 = 21,\ b = 37,\ c = 17$
確認すると、

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 = \left(\frac{37}{21}\right)^3 + \left(\frac{17}{21}\right)^3 = \frac{50653 + 4913}{9261} = \frac{55566}{9261} = 6$$

となりうまくいきました。