● 問題 436 解答＜三角定規＞

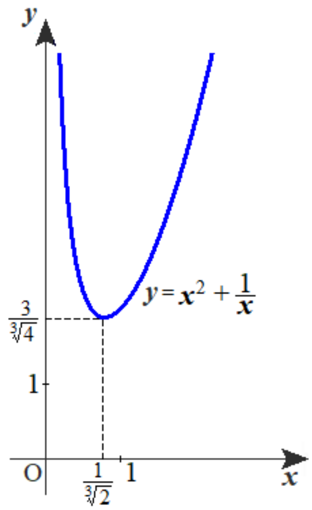
[問題]

(1) $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ と置くと， $y'=2x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^3-1}{x^2}$

$y'=0$ とする $2x^3-1=0$ の実数解は $x=2^{-1/3}$ のみで

$x\leqq 2^{-1/3}$ のとき $y'\leqq 0$, $x\geqq 2^{-1/3}$ のとき $y'\geqq 0$

だから，y は $x=\mathbf{2}^{-1/3}$ のとき最小値 $(2^{-1/3})^2+2^{1/3}=\dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt[3]{\mathbf{4}}}$ をとる。…[答]

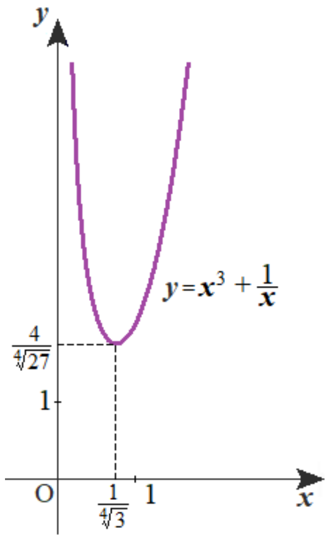


(2) $y=x^3+\dfrac{1}{x}$ と置くと， $y'=3x^2-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3x^4-1}{x^2}$

$y'=0$ とする $3x^4-1=0$ の正の実数解は $x=3^{-1/4}$ のみで

$x\leqq 3^{-1/4}$ のとき $y'\leqq 0$, $x\geqq 3^{-1/4}$ のとき $y'\geqq 0$

だから，y は $x=\mathbf{3}^{-1/4}$ のとき最小値 $(3^{-1/4})^3+3^{1/4}=\dfrac{\mathbf{4}}{\sqrt[4]{\mathbf{27}}}$ をとる。…[答]



(3) $x>0,\ y>0,\ f(x,y)=x+y+\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{1}{2xy}$

$x+y=u,\ xy=v$ と置くと，$u>0,\ v>0,\ u^2-4v\geqq 0,\quad \therefore\ \dfrac{1}{v}\geqq\dfrac{4}{u^2}$ …①

$f(x,y)=f(u,v)=u+\dfrac{2}{u}+\dfrac{1}{2v}\geqq u+\dfrac{2}{u}+\dfrac{2}{u^2}$ …②

$g(u)=u+\dfrac{2}{u}+\dfrac{2}{u^2}$ と置くと， $g'(u)=1-\dfrac{2}{u^2}-\dfrac{4}{u^3}=\dfrac{u^3-2u-4}{u^3}=\dfrac{(u-2)(u^2+2u+2)}{u^3}$

$g'(u)=0$ となるのは $u=2$ のみで，$u\leqq 2$ のとき $g'(u)\leqq 0$, $2\leqq u$ のとき $g'(u)\geqq 0$ だから

$g(u)$ は $u=2$ のとき最小値 $g(2)=2+\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{7}{2}$ をとる。

このとき②より $v=1$ で，$x=y=1$。

以上より求める $f(x,y)$ の最小値は，$x=\mathbf{1}$, $y=\mathbf{1}$ のときの $f(1,1)=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$ …[答]

(4) $x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z=1,\ P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$

$x+y+z=1$ だから,

$$P=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)=1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{4x}{y}+4+\frac{4z}{y}+\frac{9x}{z}+\frac{9y}{z}+9$$

$$\geqq 14+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}+2\sqrt{\frac{4z}{y}\cdot\frac{9y}{z}}+2\sqrt{\frac{9x}{z}\cdot\frac{z}{x}}=14+4+12+6=36$$

等号は $\dfrac{y}{x}=\dfrac{4x}{y},\ \dfrac{4z}{y}=\dfrac{9y}{z},\ \dfrac{9x}{z}=\dfrac{z}{x}$ のとき成立し,このとき $x:y:z=1:2:3$

$x+y+z=1$ より $x=\mathbf{\dfrac{1}{6}},\ y=\mathbf{\dfrac{1}{3}},\ z=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$。

以上より 求める P の最小値は $\dfrac{1}{1/6}+\dfrac{4}{1/3}+\dfrac{9}{1/2}=\mathbf{36}$ …[答]

《追加問題》

［問題１］

$$\begin{cases}(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)(x_4+1)=2024\\(x_1+2)(x_2+2)(x_3+2)(x_4+2)=2025\\(x_1+3)(x_2+3)(x_3+3)(x_4+3)=2026\\(x_1+4)(x_2+4)(x_3+4)(x_4+4)=2027\end{cases}\quad\cdots①$$

$x_1+1=a,\ x_2+1=b,\ x_3+1=c,\ x_4+1=d$ と置くと①は

$$\begin{cases}abcd=2024 & \cdots②\\(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)=2025 & \cdots③\\(a+2)(b+2)(c+2)(d+2)=2026 & \cdots④\\(a+3)(b+3)(c+3)(d+3)=2027 & \cdots⑤\end{cases}$$

③を展開すると

$$abcd+(bcd+cda+dab+abc)+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+(a+b+c+d)+1=2025\quad\cdots③'$$

$a+b+c+d=p,\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=q,\ bcd+cda+dab+abc=r$ と置く。

③′に②を代入し整理する。さらに④⑤についても同様にして

$$\begin{cases}p+\ q+r=0\\4p+2q+r=-7\\9p+3q+r=-26\end{cases}\quad\cdots⑥$$

⑥を解いて，$p=-6,\ q=11,\ r=-5$

これらを元に戻して，求める式の値は

$$\begin{aligned}&(x_1+5)(x_2+5)(x_3+5)(x_4+5)\\&=(a+4)(b+4)(c+4)(d+4)\\&=2024+4r+16q+64p+256\\&=2024+4(-5)+16\cdot11+64(-6)=\mathbf{2052}\quad\cdots[答]\end{aligned}$$

・WolfamAlpha によれば①の近似解は
$-7.30946\pm\ 4.68326\,i,\ 2.30946\pm\ 4.67214\,i$
となるようです。

［問題３］ x, y : 有理数，$x^3+y^3=9$

どのように攻めるのか皆目見当がつかず，取りあえず $x=\dfrac{a}{c},\ y=\dfrac{b}{c}$ の形をしたものを Excel で調べてみたところ，$x=\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{21}},\ y=\dfrac{\mathbf{37}}{\mathbf{21}}$ がすぐ見つかりました。

分母が異なるものはないのか。$x=\dfrac{a}{c},\ y=\dfrac{b}{d}$ とし，$1\leqq a, b, c, d\leqq 400$ で全数チェックしましたが，この範囲内には上記と異なる有理数は見つかりませんでした。