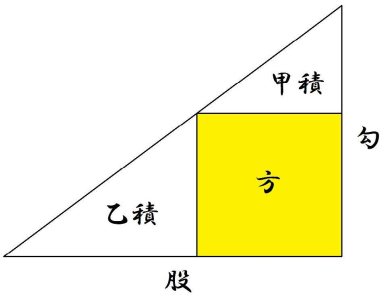
第 437 回　和算 5 題

問題 1

勾股 図の如く方を容れる　只云

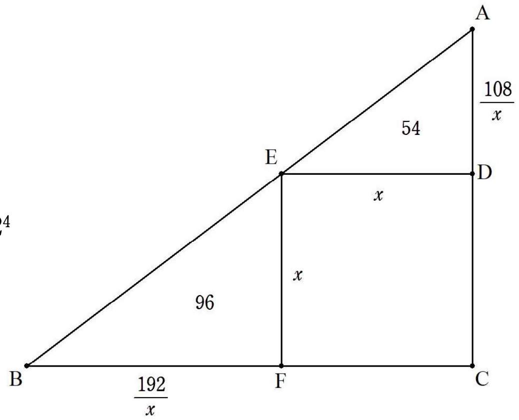
甲積五十四歩　乙積九十六歩

勾股各何程と問



答曰　勾二十一寸　股二十八寸

解答　図のように記号を付け，正方形 CDEF の 1 辺を x とおく。



$\triangle$AED＝54 より，$\dfrac{1}{2}x\,\mathrm{AD}=54$　$\therefore \mathrm{AD}=\dfrac{108}{x}$

$\triangle$EBF＝96 より，$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{BF}\,x=96$　$\therefore \mathrm{BF}=\dfrac{192}{x}$

$\triangle$AED∽$\triangle$EBF より，$x:\dfrac{192}{x}=\dfrac{108}{x}:x$　$x^2=\dfrac{192\cdot 108}{x^2}$　$x^4=12^4$

$x>0$ より，$x=12$

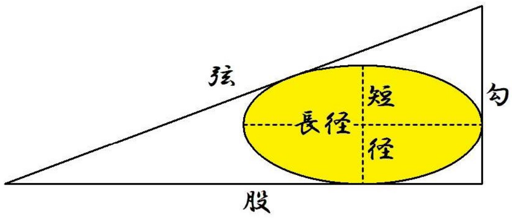
よって，勾＝AC＝$\dfrac{108}{12}+12=21$，股＝BC＝$\dfrac{192}{12}+12=28$　答

問題 2

勾股図の如く楕円を容れる　只云

股八寸　長径四寸　短径二寸

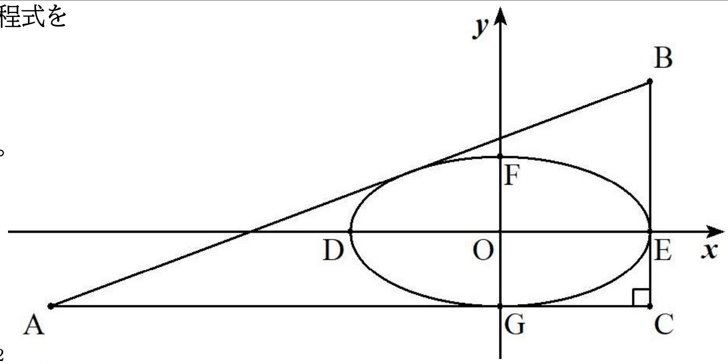
勾何程と問



答曰　勾三寸

解答　長径（長軸）4，短径（短軸）2 の楕円の方程式を

$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$　…①とおき，座標平面で考える。



図のように記号を付ける。DE＝4，FG＝2 である。

三角形 ABC について，AC＝8，BC＝a （$a>0$）

とおくと，A$(-6,\ -1)$，B$(2,\ a-1)$ となる。

直線 AB の方程式は，$y+1=\dfrac{a}{8}(x+6)$　…②

①，②から y を消去すると，$\dfrac{x^2}{4}+\left\{\dfrac{a}{8}(x+6)-1\right\}^2=1$

展開して x について整理すると，$(a^2+16)x^2+4a(3a-4)x+12a(3a-8)=0$

判別式を D とおくと，①，②は接するから $D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=\{2a(3a-4)\}^2-(a^2+16)\cdot 12a(3a-8)=512a(3-a)=0$ より，$a=3$

よって，勾＝3（寸）　答

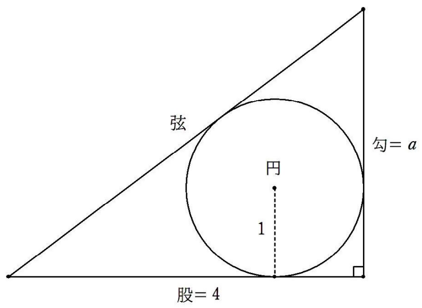
別解　楕円の長径（長軸）の方向にこの図形を $\frac{1}{2}$ 倍すると（右図），

股は 4 となり，楕円は半径 1 の円となる。

勾を a とおけば，三平方の定理により，弦は $\sqrt{a^2+4^2}$ となる。

従って，内接円の半径 $1=\dfrac{4+a-\sqrt{a^2+4^2}}{2}$ より，$a=3$

よって，勾＝3（寸）　答



問題 3

直線の上に図の如く四円を載せる　只云

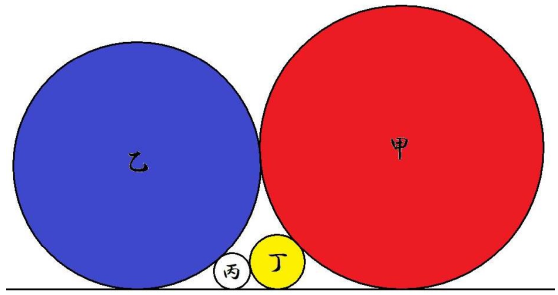
甲円径二十五寸　丙円径一寸

乙丁円径各何程と問

但し各寸位にとどまり

円径は円の直径

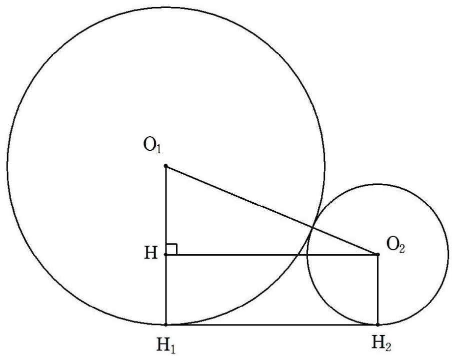
答曰　乙円径九寸　丁円径四寸



解答　まず，接する 2 円の接線の長さを考える。

右図で，2 円 O_1，O_2 の円径（直径）をそれぞれ d_1，d_2 とすると，

共通接線の長さ $H_1H_2=\sqrt{d_1d_2}$ である。



証明　$\triangle O_1O_2H$ について，$O_1O_2=\dfrac{d_1}{2}+\dfrac{d_2}{2}$，$O_1H=\dfrac{d_1}{2}-\dfrac{d_2}{2}$

であるから，$\triangle O_1O_2H$ に三平方の定理を適用して，

$$H_1H_2=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}\right)^2-\left(\frac{d_1}{2}-\frac{d_2}{2}\right)^2}=\sqrt{d_1d_2}$$　終

甲乙丙丁の円径をそれぞれ，$d_1=25$，d_2，$d_3=1$，d_4 とおく。

乙丙円の接線の長さ＋丙丁円の接線の長さ＋丁甲円の接線の長さ＝乙甲円の接線の長さ

であるから，

$$\sqrt{d_2d_3}+\sqrt{d_3d_4}+\sqrt{d_4d_1}=\sqrt{d_2d_1}$$

$d_1=25$，$d_3=1$ を代入すると，$\sqrt{d_2\cdot 1}+\sqrt{1\cdot d_4}+\sqrt{d_4\cdot 25}=\sqrt{d_2\cdot 25}$

整理すると，$6\sqrt{d_4}=4\sqrt{d_2}$　$\therefore d_4=\dfrac{4}{9}d_2$　…①

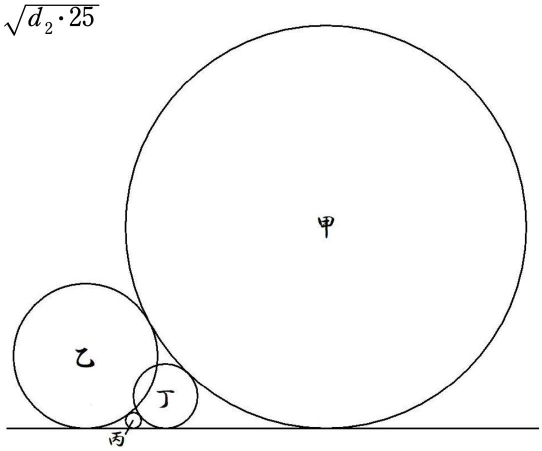
「但各寸位にとどまり」とあるので，d_2，d_4 は一桁の数値である。

（寸の 10 倍は尺，寸の $\frac{1}{10}$ は分である。）

①より，d_2 は 9 の倍数となるから，$d_2=9$，$d_4=4$

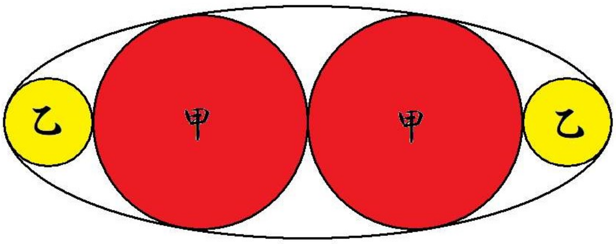
よって，乙円径 9 寸　丁円径 4 寸　答

補足　実際，このときの図は右図のようになり，乙丁円は交わる。



問題 4

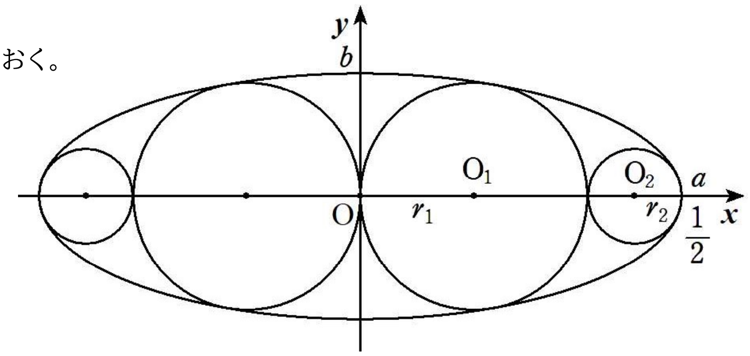
楕円内に図の如く甲円乙円各二個を容れる
全て大なる乙円といえども其周が長径の端につく
只云長径一寸
甲径　乙径　短径各何程と問



答曰　甲円径 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　乙円径 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$　短径 $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

＜水の流れ：和算家は無理数の表現を知らないので，現代風な答とする＞

解答



楕円の長径（長軸）を $2a$，短径（短軸）を $2b$ とおく。

仮定により，$a=\dfrac{1}{2}$　…①

甲円，乙円をそれぞれ $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおく。

乙円は曲率円である。

補題 2 を利用して，$r_2=\dfrac{b^2}{a}=2b^2$　…②

また，補題 1 により，$OO_1=r_1$

$r_1{}^2=\dfrac{(a^2-b^2)(b^2-r_1{}^2)}{b^2}$　$r_1=\dfrac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a}=b\sqrt{1-4b^2}$　…③

$2r_1+2r_2=a$ より，$r_1+r_2=\dfrac{a}{2}$

①，②，③を代入すると，$b\sqrt{1-4b^2}+2b^2=\dfrac{1}{4}$

両辺に 4 を掛けて移項すると，$4b\sqrt{1-4b^2}=1-8b^2$　…④

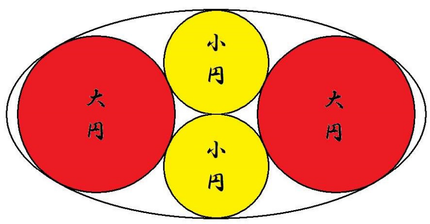
両辺を 2 乗して整理すると，$128b^4-32b^2+1=0$　$b^2=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{16}$

④の右辺が正になるのは，$b^2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{16}$　$b>0$ より，$b=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$

よって，③，②より，甲円径 $2r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，乙円径 $2r_2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$，短径 $2b=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　答

問題 5

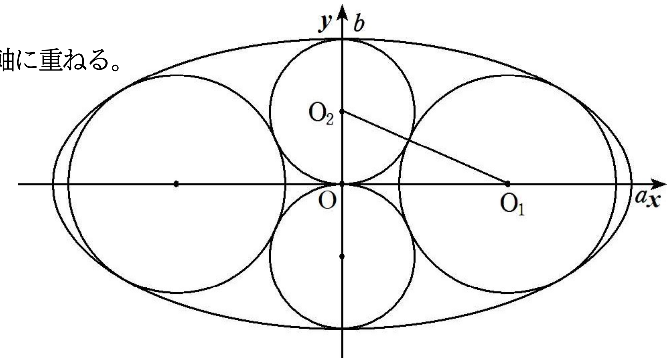
楕円内に図の如く大円小円各二個を容れる
只云長径八寸　短径四寸
大円径何程と問



答曰　大円径 三寸

出典
坂部廣胖(こうはん)「算法點竄(てんざん)指南録」(1815 年)を近畿和算ゼミナール報告集　注釈・解説　小寺裕　著から

解答　直交座標で考える。



楕円の長径（長軸），短径（短軸）をそれぞれ x 軸，y 軸に重ねる。
楕円の長軸を $2a$，短軸を $2b$，大円，小円をそれぞれ
$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおくと，$r_2=\dfrac{b}{2}$ である。

$\triangle O_1O_2O$ について，$O_1O_2=r_1+\dfrac{b}{2}$，$O_2O=\dfrac{b}{2}$，

$OO_1=d$ とおくと，三平方の定理により，

$d^2=\left(r_1+\dfrac{b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2=r_1{}^2+br_1$　…①

また，補題１により，$d^2=\dfrac{(a^2-b^2)(b^2-r_1{}^2)}{b^2}$　…②

①，②より，$r_1{}^2+br_1=\dfrac{(a^2-b^2)(b^2-r_1{}^2)}{b^2}$

整理すると，$a^2r_1{}^2+b^3r_1-b^2(a^2-b^2)=0$

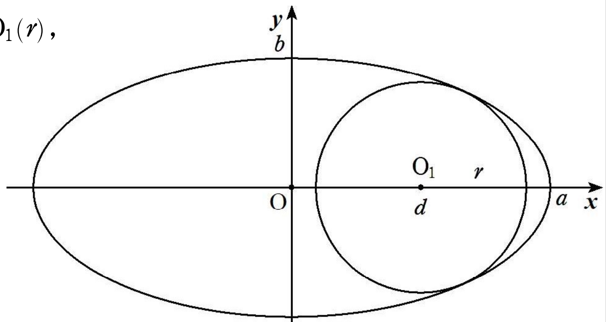
因数分解すると，$(r_1+b)\{a^2r_1-b(a^2-b^2)\}=0$

$r_1>0$ より，$r_1=\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2}$　よって，大円径は，$2r_1=\dfrac{2b(a^2-b^2)}{a^2}$

さて，本題は，$a=4$，$b=2$ の場合であるから，大円径$=\dfrac{2\cdot2(4^2-2^2)}{4^2}=3$（寸）　答

補題１
長軸 $2a$，短軸 $2b$ の楕円の中心を O，長軸上に中心をつ円を $O_1(r)$，
$OO_1=d$ とすると，

$d=\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}}{b}$



証明　楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，円の方程式 $(x-d)^2+y^2=r^2$ から，y を消去すると，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{r^2-(x-d)^2}{b^2}=1$

分母を払って x について整理すると，$(a^2-b^2)x^2-2a^2dx+a^2(b^2+d^2-r^2)=0$
判別式を D とおくと，接するから $D=0$

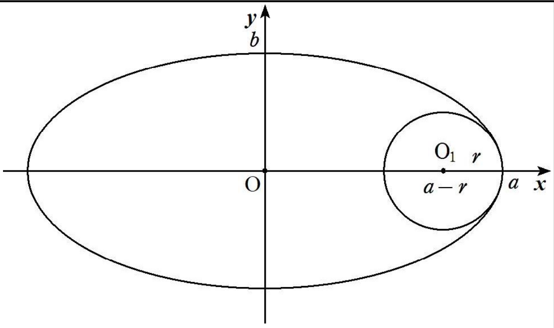
$D=(-a^2d)^2-(a^2-b^2)\cdot a^2(b^2+d^2-r^2)=a^2\{b^2d^2-(a^2-b^2)(b^2-r^2)\}=0$ より，$d^2=\dfrac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2}$

$d>0$ より，$d=\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}}{b}$　終

補題 2

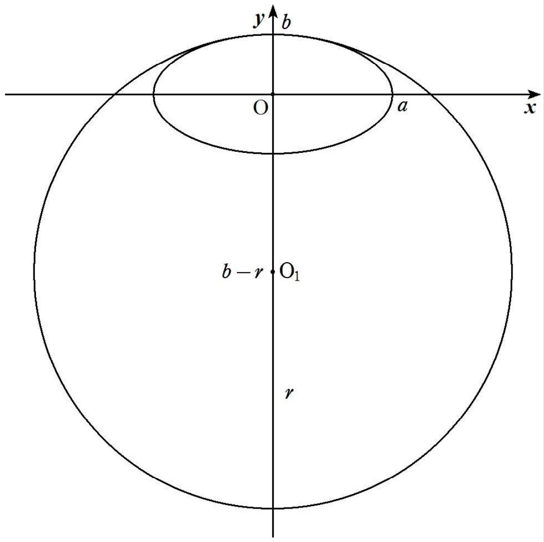
[1]　長軸 $2a$，短軸 $2b$ の楕円の長軸の端点のみでこれに内接する円のうち，半径 r の最大なもの（曲率円）は，

$$r=\frac{b^2}{a}$$



[2]　長軸 $2a$，短軸 $2b$ の楕円の短軸の端点でこの楕円を内接させる円のうち，半径 r の最小なもの（曲率円）は，

$$r=\frac{a^2}{b}$$



証明

[1]　補題 1 で，$d=a-r$ とおくと，$(a-r)^2=\dfrac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2}$

整理すると，$(ar-b^2)^2=0$　$\therefore r=\dfrac{b^2}{a}$

半径がこれよりも小さい円であれば端点で接することは図形的にも明らかである。従ってこれが最大である。　終

[2]　補題 1 で，$d=b-r$ とおき，[1] で a，b を入れ換えた場合であるから，$r=\dfrac{a^2}{b}$

半径がこれよりも大きい円であれば端点で接することは図形的にも明らかである。従ってこれが最小である。　終

（2024/2/18　ジョーカー）