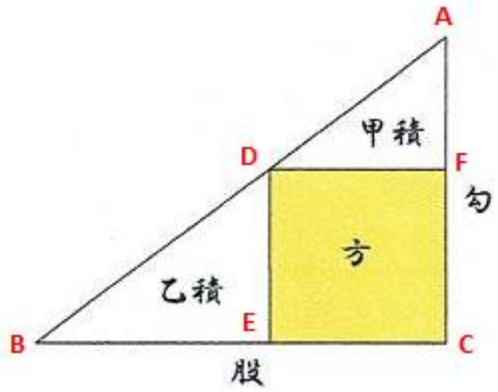
問題1



左図のように頂点に記号を付けると、次の3つの直角三角形が見つかります。

$\triangle$ABC, $\triangle$DBE, $\triangle$ADF

これらは相似ですが、$\triangle \mathrm{DBE} = 96, \triangle \mathrm{DBE} = 54$なので、この2つの三角形の辺の比は

$\sqrt{96} : \sqrt{54} = 4 : 3$

です。すると、$\mathrm{BE} : \mathrm{DF} = 4 : 3$と$\mathrm{DE} = \mathrm{DF}$より、$\mathrm{BE} : \mathrm{DE} = 4 : 3$だとわかります。これは算数でお馴染みの辺の比が$3 : 4 : 5$の直角三角形です。

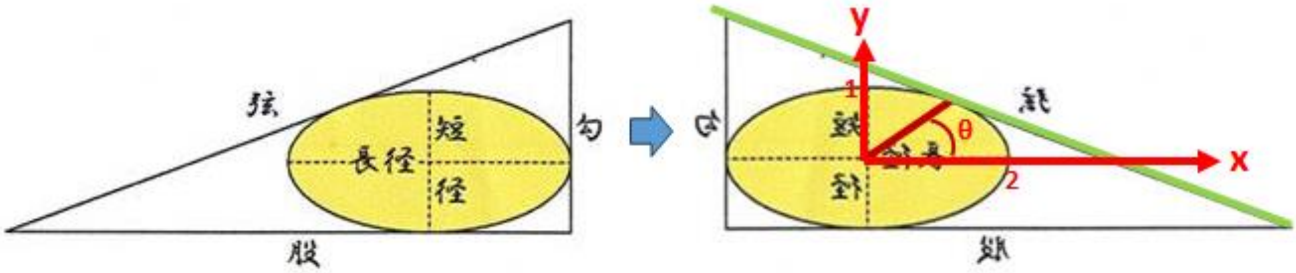
さて、$\triangle \mathrm{DBE} = 96$なので、

$$\frac{\mathrm{DE} \cdot \frac{3}{4}\mathrm{DE}}{2} = 96 \Rightarrow \mathrm{DE} = 16$$

です。DFはこれの$\frac{3}{4}$倍なので、$\mathrm{DF} = 16 \times \frac{3}{4} = 12$です。よって、股の長さは$16 + 12 = 28$です。そして、$\triangle$ABC は $3 : 4 : 5$の直角三角形なので、勾の長さは$28 \times \frac{3}{4} = 21$です。

以上より、勾 $= 21$ 寸、股 $= 28$ 寸です。

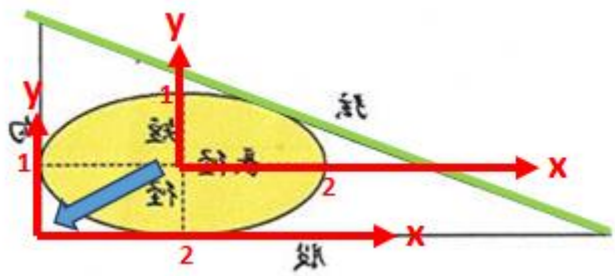
問題2　長さを変えなければ、図形に適当な変換を施して構いませんから、左右を反転させて、次のような座標系を導入します。



すると、楕円の接線の方程式（緑の直線）は媒介変数θを用いて、

$$\frac{x\cos(\theta)}{2}+y\sin(\theta)=1$$

と表すことができます。



この式でアプローチしても構いませんが、計算を楽にするため、座標軸を$(-2,-1)$移動しておきます。これに伴い接線の方程式は、

$$\frac{(x-2)\cos(\theta)}{2}+(y-1)\sin(\theta)=1$$

となります。

すると、股は8なので、接線は(8,0)を通りますから、

$$\frac{(8-2)\cos(\theta)}{2}+(0-1)\sin(\theta)=1\Rightarrow 3\cos(\theta)-1=\sin(\theta)$$

です。両辺を二乗して、

$$(3\cos(\theta)-1)^2=\sin(\theta)^2\Rightarrow 2\cos(\theta)\,(5\cos(\theta)-3)=0\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{3}{5}$$

そして、

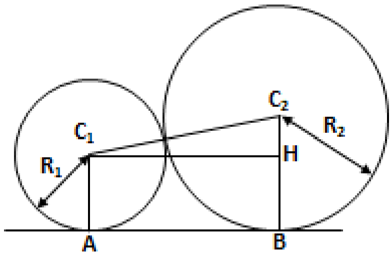
$$\sin(\theta)=\sqrt{1-\cos(\theta)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

なので、接線の方程式は、

$$\frac{(x-2)\cdot\frac{3}{5}}{2}+(y-1)\cdot\frac{4}{5}=1\Rightarrow\frac{x}{8}+\frac{y}{3}=1$$

となります。よって、y 切片は 3 なので、勾は 3 寸です。

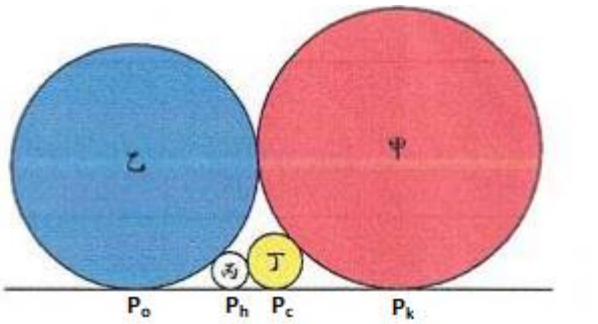
問題3 2024/02/24 追記



左図のように、円C_1、C_2は互いに外接し、点A、Bで直線に接しているとします。円C_1から直線C_2Bへの垂点Hを下すと、直角三角形C_1C_2Hができます。これに、三平方の定理を適用すると、

$$C_1H^2 + C_2H^2 = C_1{C_2}^2 \Rightarrow AB^2 + (R_2 - R_1)^2 = (R_2 + R_1)^2$$
$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{R_1R_2}$$

となります。



乙丙丁甲の半径をR_o、R_h、R_c、R_k、そして、各円と直線との接点をP_o、P_h、P_c、P_kとして、上の考察を適用すると、次の関係式が得られます。

$$P_oP_h = 2\sqrt{R_oR_h}$$
$$P_hP_c = 2\sqrt{R_hR_c}$$
$$P_cP_k = 2\sqrt{R_cR_k}$$
$$P_oP_h = 2\sqrt{R_oR_h}$$
$$P_oP_k = 2\sqrt{R_oR_k}$$

ここで、$P_oP_k = P_oP_h + P_hP_c + P_cP_k + P_oP_h$なので、

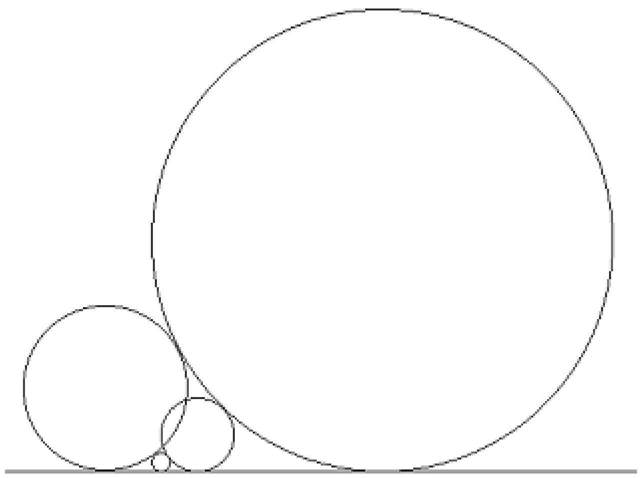
$$2\sqrt{R_oR_k} = 2\sqrt{R_oR_h} + 2\sqrt{R_hR_c} + 2\sqrt{R_cR_k} + 2\sqrt{R_oR_h}$$
$$\Rightarrow \sqrt{R_oR_k} = \sqrt{R_oR_h} + \sqrt{R_hR_c} + \sqrt{R_cR_k} + \sqrt{R_oR_h}$$

上式に、$R_k = \frac{25}{2}$、$R_h = \frac{1}{2}$を代入すると、

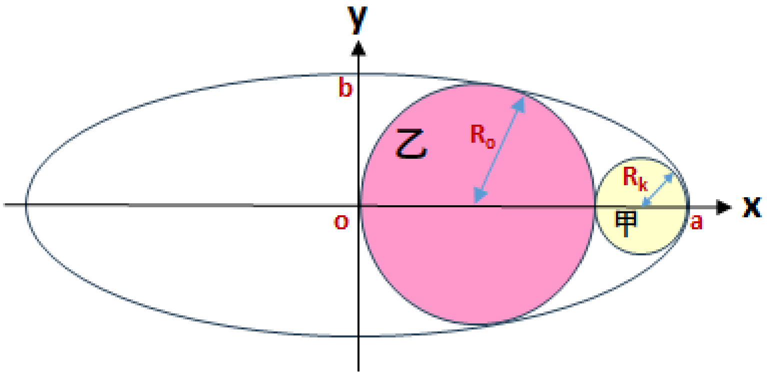
$$\sqrt{R_o\frac{25}{2}} = \sqrt{R_o\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}R_c} + \sqrt{R_c\frac{25}{2}} + \sqrt{R_o\frac{1}{2}} \Rightarrow 4R_o = 9R_c \Rightarrow R_o : R_c = 9 : 4$$

となりますが、問題文に乙丁の円径は『寸位にとどまり』と記されているので、1 桁の数字です（10 寸以上になると上位の単位『尺』になるからです）。よって、乙の円径=9 寸、丁の円径=4 寸です。

参考までに、実際の図面は右図のようになっているようです（AutoCAD で作図）。
乙と丁が交わっています。



問題4



左図のように座標系を導入します。

楕円とx軸との交点をa、y軸との交点をb、甲の半径をR_k、乙の半径をR_oとすると、

$$2(R_o+R_o)=a\cdots①$$

です。

乙は楕円に内接しているので、最終ページの補足（楕円と内接円の関係）より、

$$R_k=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-{R_k}^2)}}{b}\Rightarrow(a^2-b^2)\left(b^2-{R_k}^2\right)=(bR_k)^2\cdots②$$

です。また、甲は楕円の曲率円なので、

$$R_o=\frac{b^2}{a}\cdots③$$

です。$b>0, R_k>0, R_o>0$の範囲で、①②③を解くと、

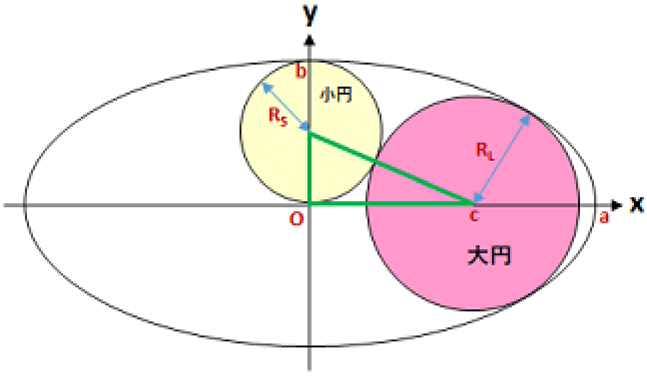
$$b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}a}{2}, R_k=\frac{\sqrt{2}a}{4}, R_o=\frac{(2-\sqrt{2})a}{4}$$

です。$a=\frac{1}{2}$を代入して、

$$b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}, R_k=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8}, R_o=\frac{(2-\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2}}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{8}$$

となります。以上より、甲径$=\frac{\sqrt{2}}{4}$寸、乙径$=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$寸、短径=$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$寸です。

問題5



左図のような座標系を導入します。

楕円とx軸との交点をa、y軸との交点をb、小円の半径をR_s、大円の中心をc、半径をR_Lとします。

そして、緑の直角三角形に三平方の定理を適用して、

$$R_s^2 + c^2 = (R_s + R_L)^2 \cdots ①$$

です。

小円、大円は楕円に内接しているので、最終ページの補足（楕円と内接円の関係）より、

$$R_s = \frac{a^2}{b} \cdots ②$$

$$c = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - R_L^2)}}{b} \cdots ③$$

です。$R_s > 0, R_L > 0$の範囲で、①②③を解くと、

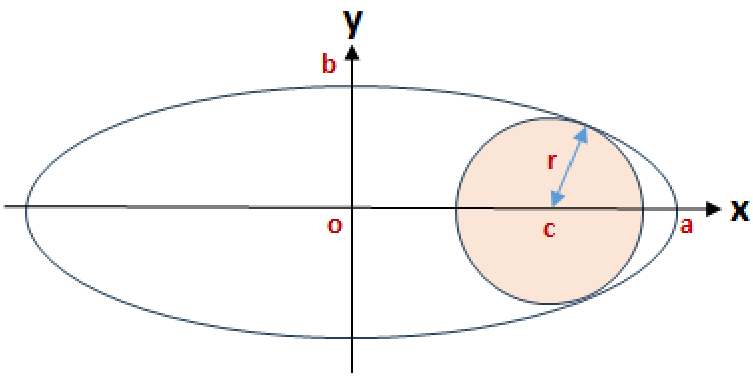
$$R_s = \frac{b^2}{a}, R_L = \frac{b(\sqrt{a^6 - b^2a^4 + b^6} - b^3)}{a^3}$$

です。$a = 4, b = 2$を代入して、

$$R_s = \frac{2^2}{4} = 1, R_L = \frac{2(\sqrt{4^6 - 2^2 4^4 + 2^6} - 2^3)}{4^3} = \frac{3}{2}$$

となります。以上より、大円径 $= 3$ 寸です。

補足（楕円と内接円の関係）



左図のように楕円に円が内接しているとします。
このとき、楕円と円は下記の方程式で表現できます。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots①$$

$$(x-c)^2+y^2=r^2\cdots②$$

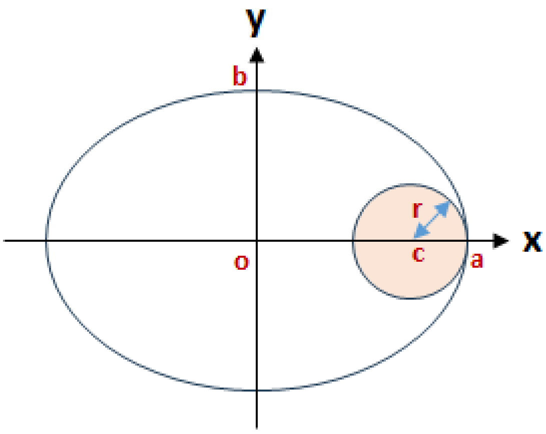
②を$y^2=r^2-(x-c)^2$とやって、①に代入すると、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{r^2-(x-c)^2}{b^2}=1 \Rightarrow (b^2-a^2)x^2+2a^2cx+a^2r^2-a^2c^2-a^2b^2=0$$

ですが、これが重解を持てば、楕円に円が接するので、判別式を$D/4$とすると、

$$D/4=(a^2c)^2-(b^2-a^2)(a^2r^2-a^2c^2-a^2b^2)=0 \Rightarrow \mathbf{c=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}}{b}}$$

となります。これが楕円とその内接円の関係式です。



特に左図のように内接する場合は、$a=c+r \Rightarrow c=a-r$なので、これを上式に適用すると、

$$a-r=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}}{b} \Rightarrow \mathbf{r=\frac{b^2}{a}}$$

となります。