第 437 回　よふかしのつらいおじさん

問題 1

●直角三角形 ADE と DBF は相似の関係です。

△ADE と△DBF の面積が、それぞれ 54 歩と 96 歩なので、

縦 AE と DF の長さの比は、$\mathrm{AE:DF} = \sqrt{54}:\sqrt{96} = \sqrt{6\times9}:\sqrt{6\times16} = 3:4$

四角形 DFCE が正方形なので、DE＝DF より、$\mathrm{AE:DE} = 3:4$

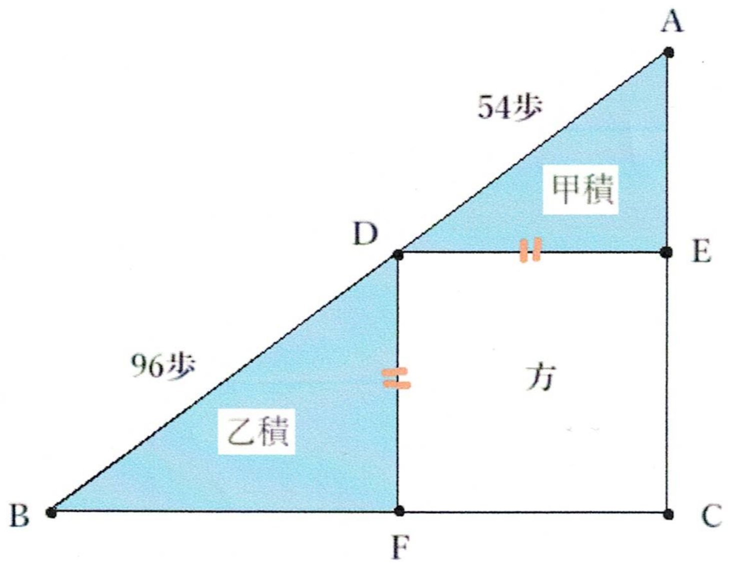
直角三角形 ADE の縦と横の長さを $\mathrm{AE} = 3\mathrm{x}, \mathrm{DE} = 4\mathrm{x}$ とします。

$\Delta\mathrm{ADE} = \frac{1}{2}\mathrm{DE}\times\mathrm{AE} = \frac{1}{2}\times4\mathrm{x}\times3\mathrm{x} = 6\mathrm{x}^2 = 54 \quad \rightarrow \quad \mathrm{x} = 3$

つまり、AE＝9, DE＝12 となります。（単位は、「尋」だと思います）

直角三角形 ABC の縦（勾）は、AC＝AE＋EC＝AE＋DE＝9＋12＝21。

横（股）は、△ADE∽△ABC なので、$\mathrm{BC} = \mathrm{DE}\times\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}} = 12\times\frac{21}{9} = 28$。



●面積の 1 歩は、6 尺×6 尺の面積で、

長さの 1 尋は、5 尺ないし 6 尺だそうです。

1 尋＝6 尺とすると、うまくいきます。

問題 2

●始めに、図のように円 A を考えます。

中心 A（6,2）、半径 2 とします。

∠AOB＝θ とします。

△OAB は、AB＝2、OB＝6 なので、$\mathrm{OA} = \sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{OB}^2} = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$

よって、$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

△OAC≡△OAB です。

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

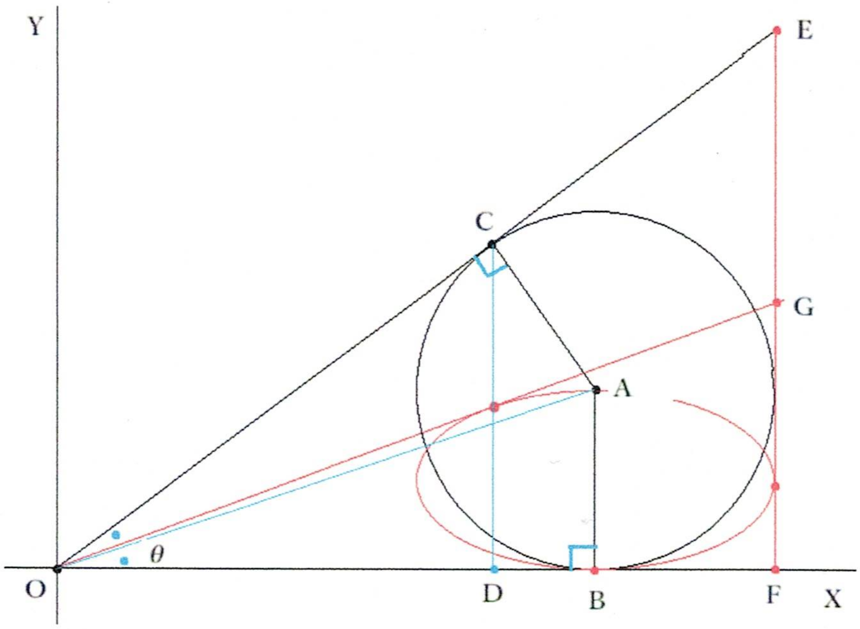
ゆえに、

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{3}{4}$$

よって、

$$\mathrm{EF} = \mathrm{OF}\times\tan 2\theta = 8\times\frac{3}{4} = 6$$

次に、縦方向に図を１／２倍すれば、与えられた楕円になるので、鈎は、６の半分で3。



問題３

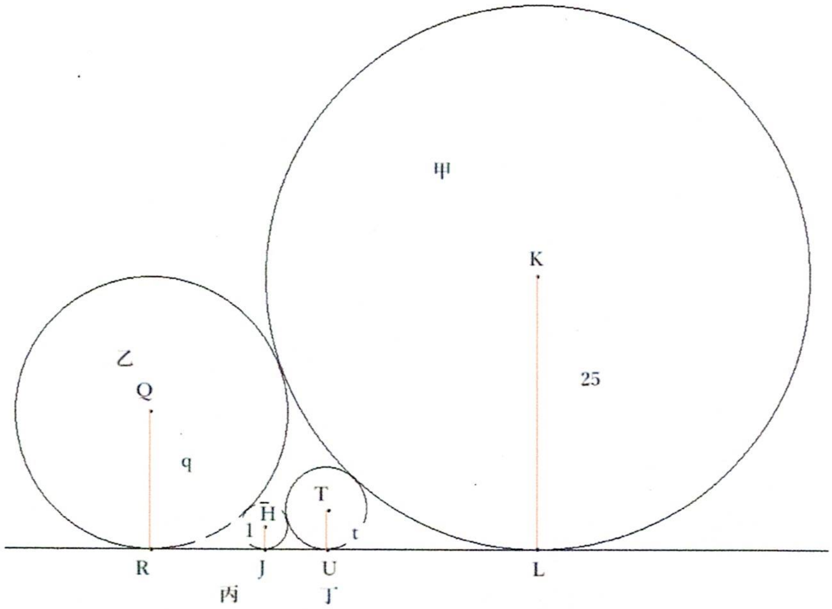
●図のように円甲、乙、丙、丁と直線の接点をそれぞれL、R、J、Uとします。
円甲、乙、丙、丁の直径をそれぞれ25、ｑ、１、ｔとします。

各接点間の距離は、

$$\mathrm{LR} = 2\sqrt{\frac{25}{2}\times\frac{q}{2}} = 5\sqrt{q},\ \mathrm{LU} = 2\sqrt{\frac{25}{2}\times\frac{t}{2}} = 5\sqrt{t},\ \mathrm{UJ} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}} = \sqrt{t},\ \mathrm{JR} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{q}{2}} = \sqrt{q}$$

$$\mathrm{LR} = \mathrm{LU} + \mathrm{UJ} + \mathrm{JR} \ \rightarrow\ 5\sqrt{q} = 5\sqrt{t} + \sqrt{t} + \sqrt{q} \ \rightarrow\ 2\sqrt{q} = 3\sqrt{t} \ \rightarrow\ \frac{q}{t} = \frac{9}{4}$$

円乙、丁の径は寸位にとどまるということで、整数の１桁になるので、
それぞれ、9、４寸になります。



問題４

●楕円の短径をｂ、円甲、乙の直径をそれぞれｋ、ｑとします。

楕円は、

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1 \quad\rightarrow\quad 4b^2x^2+4y^2-b^2=0 \quad\cdots\quad (ア)$$

円甲は、

$$\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2 \quad\rightarrow\quad y^2=kx-x^2 \quad\cdots\quad (イ)$$

円乙は、

$$\left\{x-\left(k+\frac{q}{2}\right)\right\}^2+y^2=\left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad\rightarrow\quad y^2=-x^2+(1-q)x+\frac{q}{2}-\frac{1}{4}$$

また、$k+q=\frac{1}{2}$ なので、

$$k+q=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad q=\frac{1}{2}-k \quad\rightarrow\quad 1-q=1-\left(\frac{1}{2}-k\right)=k+\frac{1}{2}$$

$$k+q=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad \frac{k}{2}+\frac{q}{2}=\frac{1}{4} \quad\rightarrow\quad \frac{q}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{k}{2}$$

として乙の式をｋで表すと、

$$y^2=-x^2+(1-q)x+\frac{q}{2}-\frac{1}{4} \quad\rightarrow\quad y^2=-x^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\frac{k}{2} \quad\cdots\quad (ウ)$$

●円甲が楕円に接するので、（イ）を（ア）に入れて、

$$4b^2x^2+4y^2-b^2=0 \quad\rightarrow\quad 4b^2x^2+4(kx-x^2)-b^2=0$$

$$\rightarrow\quad 4(b^2-1)x^2+2\cdot 2kx-b^2=0 \quad\rightarrow\quad 判別式\ D=4k^2+4(b^2-1)b^2=4(k^2+b^4-b^2)=0$$

円乙が楕円に接するので、（ウ）を（ア）に入れて、

$$4b^2x^2+4y^2-b^2=0 \;\rightarrow\; 4b^2x^2+4\left\{-x^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\frac{k}{2}\right\}-b^2=0$$

$$\rightarrow\; 4(b^2-1)x^2+2\cdot(2k+1)x-2k-b^2=0$$

$$\rightarrow\; 判別式\ D=(2k+1)^2+4(b^2-1)(2k+b^2)=4(k^2+b^4-b^2)+(8b^2-4)k+1=0$$

上の結果から緑色の部分が 0 なので、

$$(8b^2-4)k+1=0 \;\rightarrow\; k=\frac{1}{4-8b^2} \;\cdots\; (エ)$$

この k を緑色の式に入れると、

$$k^2+b^4-b^2=0 \;\rightarrow\; \left(\frac{1}{4-8b^2}\right)^2+b^4-b^2=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{16-64b^2+64b^4}=-b^4+b^2$$

$$\rightarrow\; 64b^8-128b^6+80b^4-16b^2+1=0 \;\rightarrow\; (8b^4-8b^2+1)^2=0$$

$$\rightarrow\; b^2=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$$

これを（エ）に入れると、

$$k=\frac{1}{4-8b^2}=\frac{1}{4-8\times\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{\mp2\sqrt{2}} \;\rightarrow\; k=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\quad(>0)$$

$k+q=\frac{1}{2}$ なので、

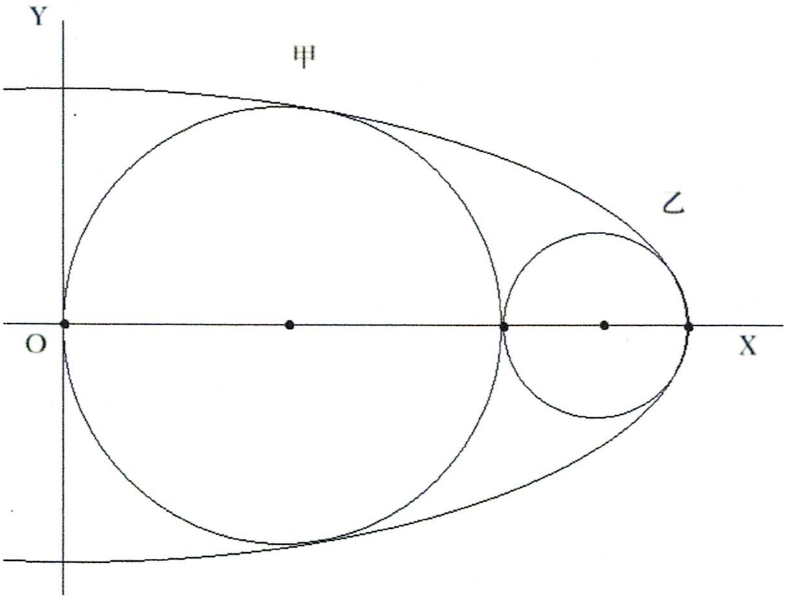
$$q=\frac{1}{2}-k=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

b^2 の複合はマイナスの方なので、

$$b^2=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4} \;\rightarrow\; b^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \;\rightarrow\; b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

以上から、

円甲、乙の直径は、それぞれ$\frac{\sqrt{2}}{4}$寸、$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$寸、楕円の短径は、$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$寸。



問題5

●右の大円の中心の x 座標を p、直径を q、上の小円の中心を R とします。

また、小円の直径は 2 です。

楕円は、

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \quad \rightarrow \quad x^2+4y^2-16=0 \quad \cdots \quad (A)$$

大円は、

$$(x-p)^2+y^2=\left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad y^2=\left(\frac{q}{2}\right)^2-(x-p)^2 \quad \cdots \quad (B)$$

大円が楕円に接するので、（B）を（A）に入れて、

$$x^2+4y^2-16=0 \quad \rightarrow \quad x^2+4\left\{\left(\frac{q}{2}\right)^2-(x-p)^2-16\right\}=0 \quad \rightarrow \quad 3x^2-8px+(4p^2-q^2+16)=0$$

判別式をとって、

$$D=16p^2-3(4p^2-q^2+16)=0 \quad \rightarrow \quad 4p^2+3q^2-48=0 \quad \cdots \quad (C)$$

●△ＯＰＲが直角三角形なので、

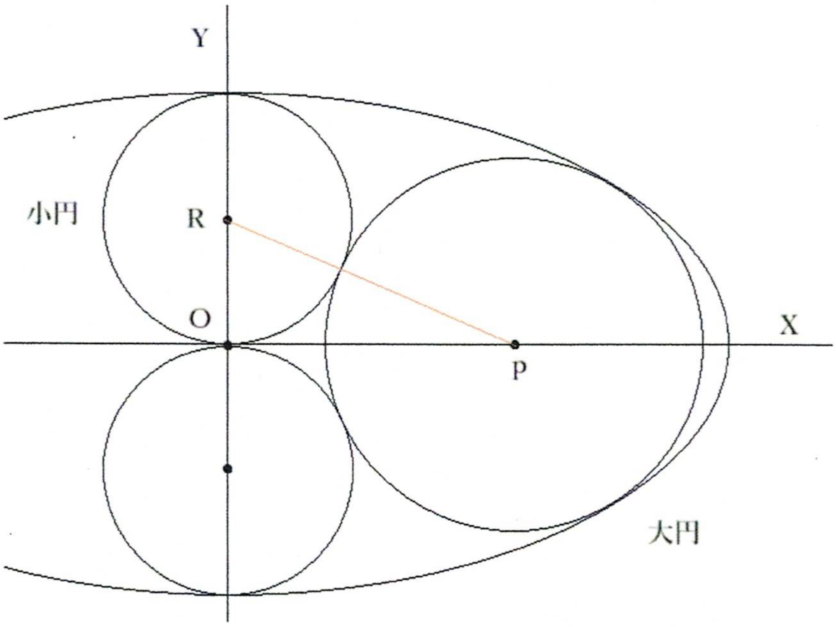
$$PR^2=OP^2+OR^2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{q}{2}+1\right)^2=p^2+1^2 \quad \rightarrow \quad p^2-\frac{1}{4}q^2-q=0$$

$$\rightarrow \quad 4p^2-q^2-4q=0 \quad \cdots \quad (D)$$

（C）から（D）を引くと、

$$4q^2+4q-48=0 \quad \rightarrow \quad 4(q+4)(q-3)=0 \quad \rightarrow \quad q=3\ (>0)$$

よって、大円の直径は、3 寸です。


Y
小円
R
O
X
P
大円