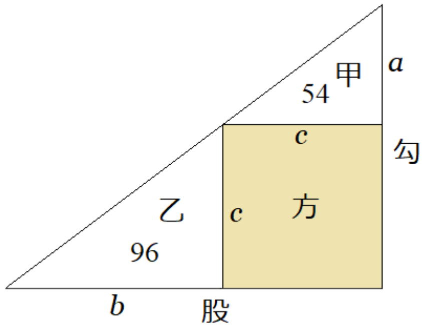
● 問題 437 解答＜三角定規＞



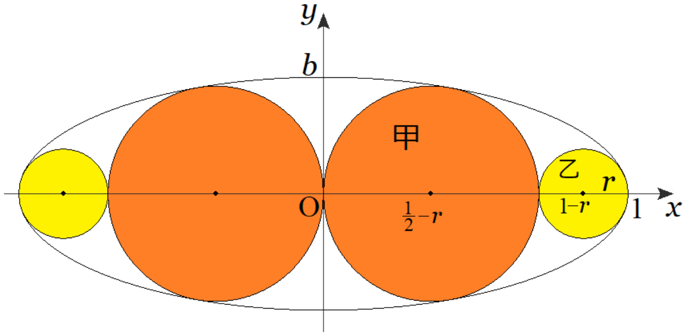
[問題1] 右図のように a, b, c を定めると，題意より

$ac=108$ …①, $bc=192$ …②　∴ $abc^2=108\cdot192=12^4$ …③

また，甲∽乙 より　$a:c=c:b$　∴ $ab=c^2$ …④

③④より，$c^4=12^4$　∴ $c=12$, ①②に戻して $a=9$, $b=16$

以上より，勾＝$a+c=$**21**, 股＝$b+c=$**28**　…[答]



[問題４] 右図のように座標軸･座標を定めると

楕円: $b^2x^2+y^2=b^2$　…①

乙円: 中心 $(1-r,\ 0)$, 半径 r

$(x-1+r)^2+y^2=r^2$　…②

甲円: 中心 $\left(\dfrac{1}{2}-r,\ 0\right)$, 半径 $\dfrac{1}{2}-r$

$\left(x-\dfrac{1}{2}+r\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}-r\right)^2$　…③

③－①: $(1-b^2)x^2-(1-2r)x+b^2=0$　…④

楕円①と甲円③が接する ⇔ ④が重解をもつ

$$\therefore\ \frac{D}{4}=(1-2r)^2-4b^2(1-b^2)=0\quad \therefore\ 4b^4-4b^2+(1-2r)^2=0\quad \therefore\ b^2=\frac{1\pm\sqrt{1-(1-2r)^2}}{2}\ \cdots⑤$$

また，乙円が楕円に含まれ右端で接することから，$r\leqq$右端での楕円の曲率半径$=\dfrac{(\text{半短軸})^2}{\text{半長軸}}=b^2$

⑤の複号が＋のとき　$\dfrac{1}{2}+\sqrt{r-r^2}\geqq r$, 整理して $8r^2-8r+1\leqq0$

これを解くと $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\leqq r\leqq\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ となるが，これは不適。

⑤の複号が－のとき　$\dfrac{1}{2}-\sqrt{r-r^2}\geqq r$, 整理して $8r^2-8r+1\geqq0$

∴ $r\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\leqq r$　左側が題意に適する。

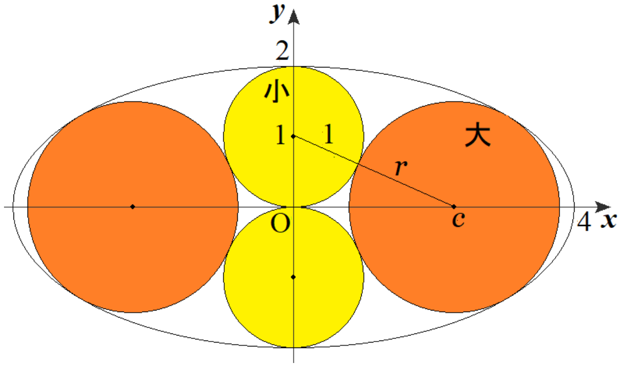
よって，乙円の半径の最大値は $r=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$　…⑥

⑥を⑤②に戻して　$b^2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, $b=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\dfrac{1}{2}-r=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

楕円の半短軸を問題の 2 倍の 1 で計算を始めたため，上記が求める直径で

甲円径: $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$, 乙円径: $\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}$, 楕円の短軸: $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$　…[答]

[問題５] 右図のように座標軸･座標を定めると



楕円: $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ …①

大円: $(x-c)^2+y^2=r^2$ …②

大円と小円の配置より

$c^2+1=(r+1)^2$ …③

③より $r=\sqrt{c^2+1}-1$ を②に代入し整理すると

$x^2-2cx+y^2+2\sqrt{c^2+1}-2=0$ …④

④−①× 4: $\dfrac{3}{4}x^2-2cx+2\sqrt{c^2+1}+2=0$ …⑤

題意より①と②は接しているから，⑤の判別式の値は 0。

$\therefore\ \dfrac{D}{4}=c^2-\dfrac{3}{4}\cdot(2\sqrt{c^2+1}+2)=0$

これを解いて $c^2=\dfrac{21}{4}$, ③に戻して $r=\dfrac{3}{2}$。

以上より，求める大円の直径は $2r=\mathbf{3}$ …[答]