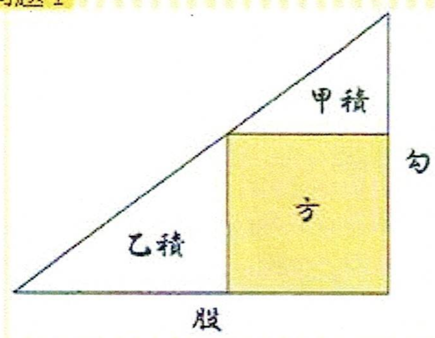
第 437 回数学的な連続応募問題

第 1 問

問題 1



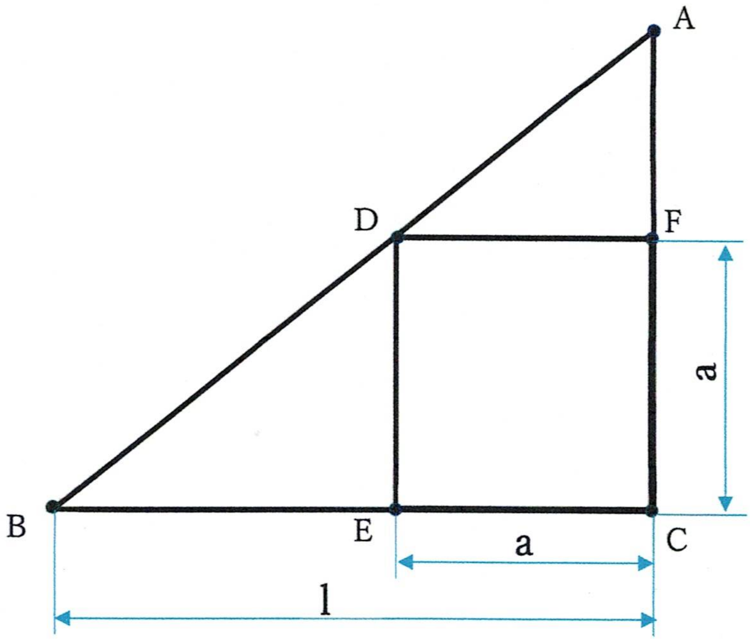
勾股図の如く方を容れる　只云
甲積五十四歩　乙積九十六歩
勾股各何程と問

勾股は直角三角形
方は正方形

答曰　勾二十一寸　股二十八寸

（解）

正方形の 1 辺の長さを a、股の長さを l とする。また、各点の符号を下図のように付記する。



△BED∽△DFA∽△BCA より、

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BE}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{DF}} \quad \therefore \quad (\mathrm{AF})=(\mathrm{DF})\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BE}}=(\mathrm{a})\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l-a}}=\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{l-a}}$$

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BE}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \quad \therefore \quad (\mathrm{AC})=(\mathrm{BC})\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BE}}=(\mathrm{l})\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l-a}}=\frac{\mathrm{al}}{\mathrm{l-a}}$$

となる。題意より、

$$\text{甲積}=\frac{1}{2}(\mathrm{DF})(\mathrm{AF})=\frac{1}{2}(a)\left(\frac{a^2}{l-a}\right)=\frac{a^3}{2(l-a)}=54 \qquad \cdots(1)$$

$$\text{乙積}=\frac{1}{2}(\mathrm{BE})(\mathrm{DE})=\frac{1}{2}(l-a)(a)=\frac{a(l-a)}{2}=96 \qquad \cdots(2)$$

となる。(1)、(2)式より、

$$\begin{cases} a^3 + 108a - 108l = 0 & \cdots(3) \\ -a^2 + al - 192 = 0 & \cdots(4) \end{cases}$$

となる。(3)、(4)式を連立して解くと、

$$\mathbf{a} = \mathbf{12}\text{寸}, \quad \mathbf{l}(\text{股}) = \mathbf{28}\text{寸}$$

を得る。従って、AC(勾)は、前述の結果から、

$$(\mathrm{AC}) = \frac{\mathrm{al}}{\mathrm{l-a}} = \frac{12 \cdot 28}{28 - 12} = 21(\text{寸})$$

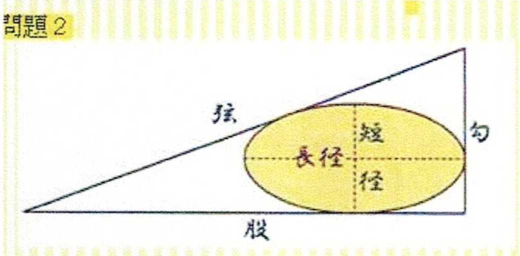
となる。

以上求める結果は、股 28 寸、勾 21 寸となる。

(答 股 28 寸、勾 21 寸)

第 437 回数学的な連続応募問題

第 2 問

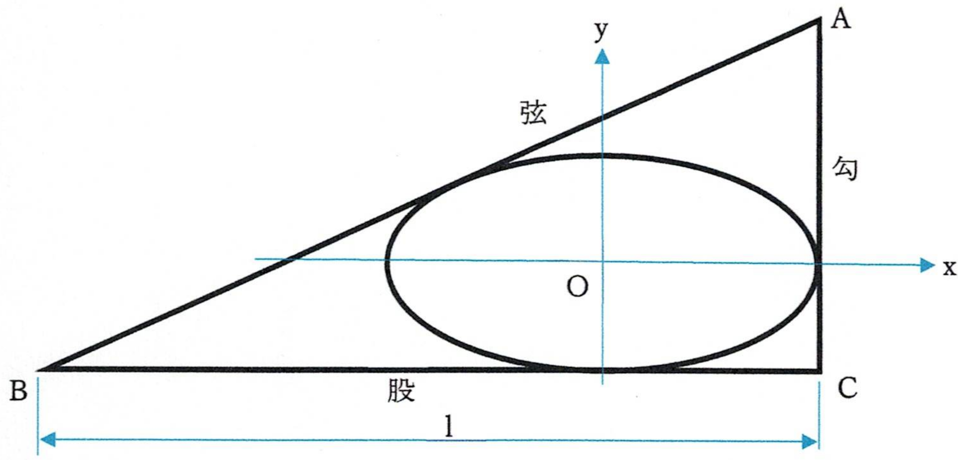


勾股図の如く楕円を容れる　只云　股八寸　長径四寸
短径二寸
勾何程と問

答曰　勾三寸

（解）

楕円の長径，短径をおのおの 2a、2b とし、三角形の股を l とする。そして、楕円の中心 O にx－y座標系の原点を置く（下図参照）。



点 A,B,C の座標は以下に示す通りとなる。ただし、点 A の y 座標は不明のため、Ay とおく。

点 A (a, Ay),　 点 B (a−l, −b)，点 C (a , −b)

そして、楕円の式および直線 AB の式は、直線の傾きをmとすると、下記の式で与えられる。

楕円：
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots(1)$$

直線AB：
$$y=mx-b-m(a-l)=(x+l-a)m-b \quad \cdots(2)$$

(2)式を(1)式に代入する。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}\{(x+l-a)m-b\}^2=1$$
$$b^2x^2+a^2\{(x+l-a)m-b\}^2=a^2b^2$$
$$b^2x^2+a^2\{mx+(lm-am-b)\}^2=a^2b^2$$
$$b^2x^2+a^2\{m^2x^2+2m(lm-am-b)x+(lm-am-b)^2\}-a^2b^2=0$$
$$(b^2+a^2m^2)x^2+2ma^2(lm-am-b)x+\{a^2(lm-am-b)^2-a^2b^2\}=0$$

直線 AB と楕円は接しているので、上式の判別式 D はゼロであることより、

$$D=\{2ma^2(lm-am-b)\}^2-4(b^2+a^2m^2)\{a^2(lm-am-b)^2-a^2b^2\}=0$$

$$= \left(8a^3b^2l - 4a^2b^2l^2\right)m^2 + \left(8a^2b^3l - 8a^3b^3\right)m = 0$$
$$= 4a^2b^2l(2a - l)m^2 + 8a^2b^3(l - a)m = 0$$

両辺を$4a^2b^2m$で割る。

$$l(2a - l)m + 2b(l - a) = 0$$

従って、

$$m = \frac{2b(l-a)}{l(l-2a)} \qquad \cdots(3)$$

となる。よって、直線 AB の式は、

$$y = \frac{2b(l-a)}{l(l-2a)}(x + l - a) - b \qquad \cdots(4)$$

となる。(4)式を用いて、点 A の y 座標 Ay を求める。Ax＝a より、

$$A_y = \frac{2b(l-a)}{l(l-2a)}(a + l - a) - b$$

$$= \frac{2(l-a)b}{l-2a} - b$$

$$= \frac{2bl - 2ab - bl + 2ab}{l-2a}$$

$$= \frac{bl}{l-2a} \qquad \cdots(5)$$

を得る。従って、勾の長さは、

$$勾 = A_y + b$$

$$= \frac{bl}{l-2a} + b$$

となる。題意より、

$$l = 8寸, \quad a = \frac{4}{2} = 2寸, \quad b = \frac{2}{2} = 1寸$$

であるから、

$$勾 = \frac{1 \cdot 8}{8 - 2 \cdot 2} + 1 = 3寸$$

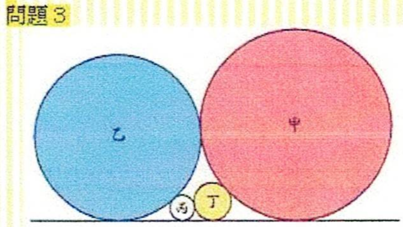
となる。よって、勾の長さは、3 寸となる。

（答　勾の長さ　3 寸）

第 437 回数学的な連続応募問題

第３問

問題３



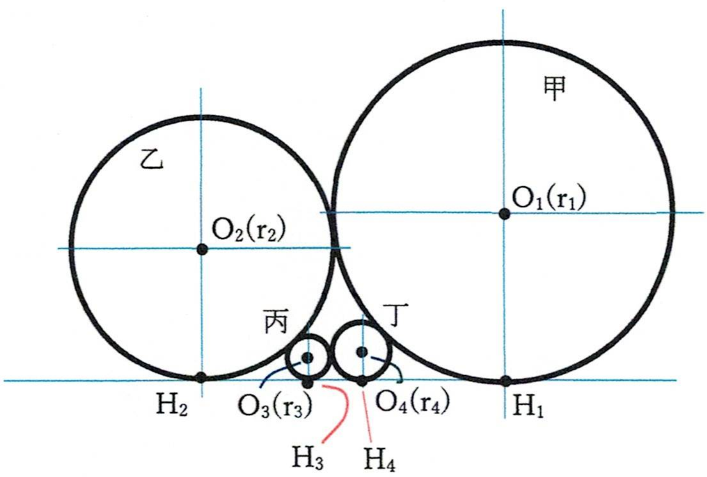
直線の上に図の如く四円を載せる　只云　甲円径二十五寸　丙円径一寸
乙丁円径各何程と問
但し各寸位にとどまり

円径は円の直径

答曰　乙円径九寸　丁円径四寸

（解）

甲円、丙円の半径をおのおの$\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}$とする。



線分$(\mathbf{H_1H_2})$の長さについて調べる。線分$(\mathbf{H_1H_2})$の長さを表すのに 2 通りの方法がある。以下それを示す。

$$(\mathbf{H_1H_2}) = 2\sqrt{\mathbf{r_1r_2}} \qquad \cdots(1)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{H_1H_2}) &= (\mathbf{H_1H_4}) + (\mathbf{H_4H_3}) + (\mathbf{H_3H_2}) \\ &= 2\sqrt{r_1r_4} + 2\sqrt{r_4r_3} + 2\sqrt{r_3r_2} \qquad \cdots(2)\end{aligned}$$

(1)=(2)式より、

$$2\sqrt{\mathbf{r_1r_2}} = 2\sqrt{r_1r_4} + 2\sqrt{r_4r_3} + 2\sqrt{r_3r_2}$$

問題より、甲円、丙円の大きさが与えられているので、$\mathbf{r_1 = 12.5}$寸$,\ \mathbf{r_3 = 0.5}$寸を上式に代入する。

$$\begin{aligned}\sqrt{12.5\mathrm{r_2}} &= \sqrt{12.5r_4} + \sqrt{0.5r_4} + \sqrt{0.5r_2} \\ 5\sqrt{\mathrm{r_2}} &= 5\sqrt{r_4} + \sqrt{r_4} + \sqrt{r_2} \\ 4\sqrt{\mathrm{r_2}} &= 6\sqrt{r_4}\end{aligned}$$

両辺を平方する。

$$16r_2 = 36r_4$$

$$4r_2 = 9r_4$$

従って、

$$4(2r_2) = 9(2r_4)$$

となる。ここで、題意より、乙円、丁円の直径は整数であるという制限が加えられているので、上式を満足するのは、

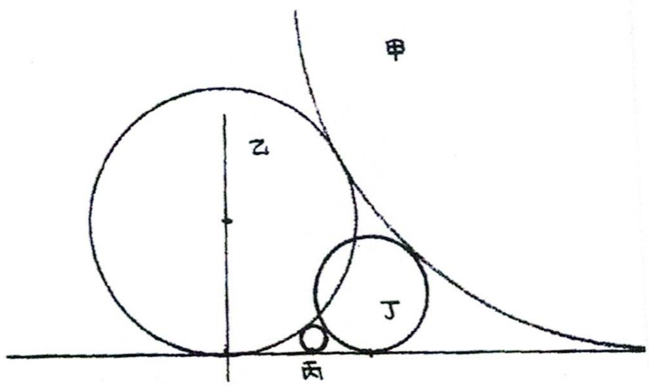
$$(2r_2) = 9\text{寸}$$
$$(2r_4) = 4\text{寸}$$

となる。従って、乙円直径＝9 寸、丁円直径＝4 寸となる。

（答　乙円直径＝9 寸、丁円直径＝4 寸）

「注」

この問題は、未知数が 2 個に対し、方程式が 1 つである。厳密には、2 個の未知数が決定されたわけではない。上記で求めた解が、実際に成り立つのかどうか、実際に図を描いて確認した。その結果を下図に示す。

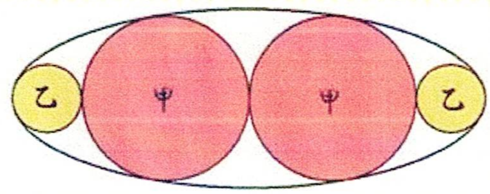


図に示されるように、乙円が丁円と干渉している。この解は、数学的には成り立つが、実際には成り立たない。

以上

第 437 回数学的な連続応募問題

第 4 問

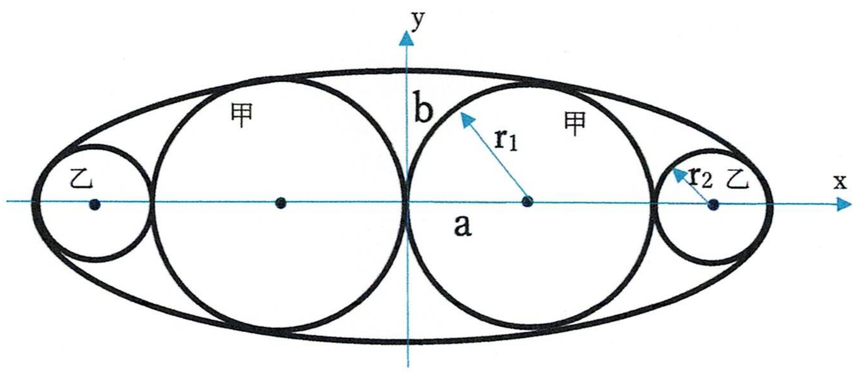


問題 4
　楕円内に図の如く甲円乙円各二個を容れる　全て大なる乙円といえども基周が長径の端につく　只云長径一寸甲径　乙径　短径何程と問

答日　甲円径 $\frac{\sqrt{2}}{4}$　乙円径 $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$　短径 $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

（解）

甲円の半径を r_1、乙円の半径を r_2、楕円の長径及び短径をおのおの a,b とする。



図に示されるように、

$$\boldsymbol{a = 2r_1 + 2r_2} \qquad \cdots(1)$$

という関係があり、さらに題意より、乙円は曲率円であることから、

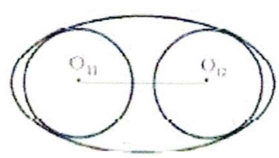
$$\boldsymbol{r_2 = \frac{b^2}{a}} \qquad \cdots(2)$$

である。また、中村信弥著「和算の公式」に示される下記の公式を本問題に適用すると、以下

公式８４　楕円に直径の等しい２つの円 O_{11}, O_{12} が２点で内接している。

円の直径を d，楕円の長径，短径をそれぞれ p, q とすると，

$$O_{11}O_{12}{}^2 = \frac{(p^2-q^2)(p^2-d^2)}{q^2}$$



に示される関係が導かれる。

$$\boldsymbol{r_1 = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-{r_1}^2)}}{b}}$$

上式より、r_1 について解く。

$$\boldsymbol{r_1}^2 b^2 = (a^2 - b^2)(b^2 - r_1{}^2)$$
$$= a^2b^2 - a^2 r_1{}^2 - b^4 + b^2 r_1{}^2$$
$$a^2 r_1{}^2 = a^2 b^2 - b^4$$

従って、

$$r_1{}^2 = \frac{b^2(a^2 - b^2)}{a^2}$$
$$\therefore \quad r_1 = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad \cdots(3)$$

を得る。(2)、(３）式を（１）式に代入する。

$$a = 2r_1 + 2r_2$$
$$= \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - b^2} + 2\frac{b^2}{a}$$
$$a^2 = 2b\sqrt{a^2 - b^2} + 2b^2$$
$$a^2 - 2b^2 = 2b\sqrt{a^2 - b^2}$$
$$(a^2 - 2b^2)^2 = 4b^2(a^2 - b^2)$$
$$a^4 - 8a^2b^2 + 8b^4 = 0$$

上式をa^2について解く、

$$a^2 = \frac{1}{2}\left\{8b^2 \pm \sqrt{64b^4 - 4 \cdot 1 \cdot 8b^2}\right\}$$
$$= (4 \pm 2\sqrt{2})b^2$$

ここで、$a > b$であるから、

$$a = b\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})}$$

となる。よって、上式からｂを求めると、

$$b = \frac{a}{\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}a \qquad \cdots(4)$$

となる。題意より、$a = 1/2$寸が与えられているので、これを（4）式に代入し、

$$b = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4}$$

が得られる。従って、(３）式を適用し、

$$r_1 = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4}(2)\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2 - \sqrt{2}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{16}}$$

$$=\frac{1}{8}\sqrt{2}$$

となる。次に、（２）式より、

$$r_2=\frac{b^2}{a}$$

$$=(2)\frac{2-\sqrt{2}}{16}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{8}$$

を得る。以上の結果をまとめると、

$$\text{甲円径}=2\mathrm{r}_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

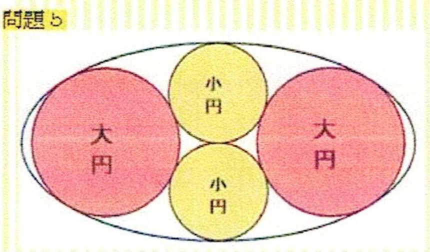
$$\text{乙円径}=2\mathrm{r}_2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{短径}=2\mathrm{b}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

となる。

第 437 回数学的な連続応募問題

問題５

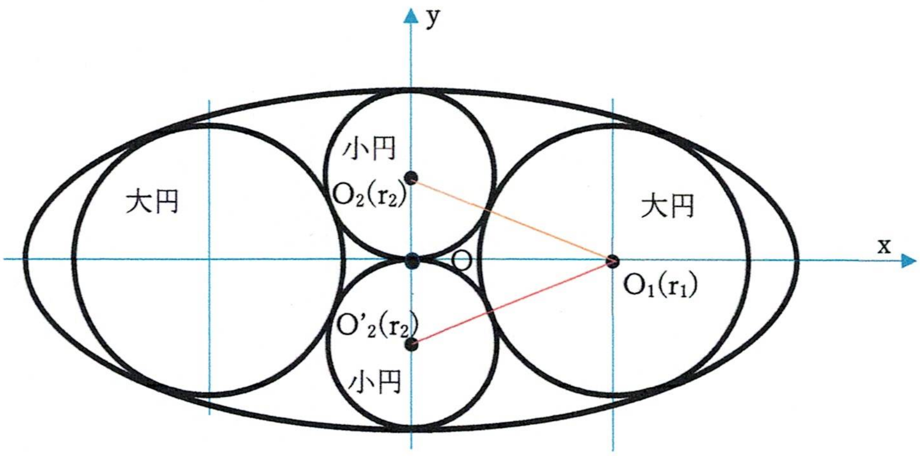


楕円内に図の如く大円小円各二個を容れる　只云長径八寸　短径四寸
大円径何ほどと問

答曰　　大円径　三寸

（解）

大円、小円の半径および楕円の長径、短径をおのおの $r_1, r_2, 2a, 2b$ とおく。



上図に示されるように、

$$b = 2r_2 \qquad \cdots(1)$$

となる。また、

$$(OO_1) = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_2{}^2} = \sqrt{r_1{}^2 + 2r_1 r_2}$$

である。次に、問題４の公式を用いて、以下の関係が与えられる。

$$b(OO_1) = \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - r_1{}^2)}$$

$$b\sqrt{r_1{}^2 + 2r_1 r_2} = \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - r_1{}^2)}$$

上式の両辺を平方し、（１）式より $r_2 = b/2$ を代入する。

$$b^2(r_1{}^2 + r_1 b) = (a^2 - b^2)(b^2 - r_1{}^2)$$

$$a^2 r_1{}^2 + b^3 r_1 - a^2 b^2 + b^4 = 0$$

上式を r_1 について解くと、

$$r_1 = \frac{1}{2a^2}\left(-b^3 \pm \sqrt{b^6 - 4a^2(-a^2b^2 + b^4)}\right)$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(-b^3 \pm \sqrt{b^6 + 4a^4b^2 - 4a^2b^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2a^2}\{-b^3 \pm b(2a^2 - b^2)\}$$

$r_1 > 0$ であるから、$r_1 = \frac{b}{a^2}(a^2 - b^2)$ となる。ここで、問題より長径(2a)=8 寸、短径(2b)=4 寸で

あるから、

$$\boldsymbol{r_1 = \frac{2}{4^2}(4^2 - 2^2) = 1.5}$$

となる。従って大円径($\boldsymbol{2r_1}$)は 3 寸となる。

(答　大円径 3 寸)