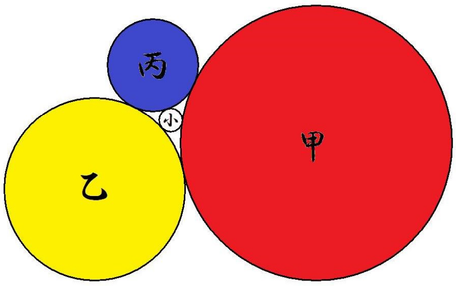
第 438 回　歴史上の定理

問題 1

互いに接する 3 個の甲乙丙の円径を六十九寸，四十六寸，二十三寸とするとき，これらすべてに外接する小円の円径を求めよ。



答曰　六寸

$\boxed{\text{解答}}$　甲乙丙円と小円の円径をそれぞれ r_1， r_2， r_3， r とする。

$r_1=\dfrac{69}{2}$ ， $r_2=23$ ， $r_3=\dfrac{23}{2}$ であるから，デカルトの円定理（後述）により，

$$r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$$

$$=\frac{\dfrac{69}{2}\cdot 23\cdot\dfrac{23}{2}}{\dfrac{69}{2}\cdot 23+23\cdot\dfrac{23}{2}+\dfrac{23}{2}\cdot\dfrac{69}{2}+2\sqrt{\dfrac{69}{2}\cdot 23\cdot\dfrac{23}{2}\left(\dfrac{69}{2}+23+\dfrac{23}{2}\right)}}=3$$

よって，小円の円径は， 六寸　$\boxed{\text{答}}$

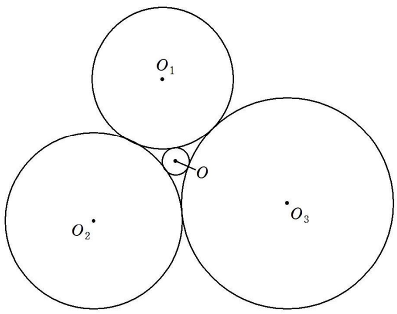
【デカルトの円定理】

ここでは，補題（三角関数）を利用して証明する。

[1]　3 円 $O_i(r_i)$ （ $i=1,\ 2,\ 3$ ）が互いに外接し，これらが円 $O(r)$ に外接しているとき，これらの 4 円の半径の間に，

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

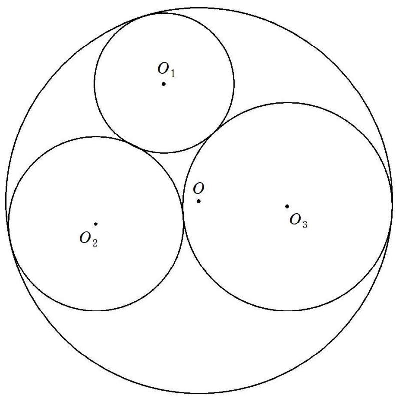
という関係が成り立つ。



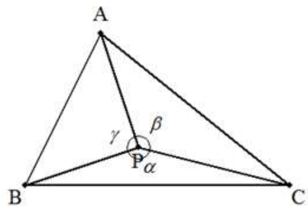
[2]　3 円 $O_i(r_i)$ （ $i=1,\ 2,\ 3$ ）が互いに外接し，これらが円 $O(r)$ に内接しているとき，これらの 4 円の半径の間に，

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

という関係が成り立つ。



補題



$\triangle$ABC 内に点 P を取り，

$\angle$BPC$=\alpha$，$\angle$CPA$=\beta$，$\angle$APB$=\gamma$ とおくと，

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$

である。

証明

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ であるから，$\cos(\alpha+\beta)=\cos(2\pi-\gamma)$

加法定理により，$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\gamma$

移項して両辺を 2 乗すると，$(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)^2=(\sin\alpha\sin\beta)^2=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$

展開して整理すると，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$　終

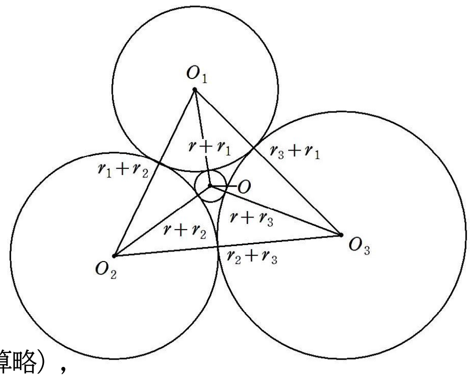
[1] の証明

$\angle O_2OO_3=\alpha$，$\angle O_3OO_1=\beta$，$\angle O_1OO_2=\gamma$ とおく。

$\triangle OO_2O_3$ に余弦定理を適用すると，

$$\cos\alpha=\frac{(r+r_2)^2+(r+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r+r_2)(r+r_3)}=\frac{r^2+(r_2+r_3)r-r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)}=1-\frac{2r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)}$$

同様に，$\cos\beta=1-\dfrac{2r_3r_1}{(r+r_3)(r+r_1)}$，$\cos\gamma=1-\dfrac{2r_1r_2}{(r+r_1)(r+r_2)}$



これらを補題の等式に代入すると，

$$\left\{1-\frac{2r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)}\right\}^2+\left\{1-\frac{2r_3r_1}{(r+r_3)(r+r_1)}\right\}^2+\left\{1-\frac{2r_1r_2}{(r+r_1)(r+r_2)}\right\}^2$$

$$-2\left\{1-\frac{2r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)}\right\}\left\{1-\frac{2r_3r_1}{(r+r_3)(r+r_1)}\right\}\left\{1-\frac{2r_1r_2}{(r+r_1)(r+r_2)}\right\}$$

$$-1=0$$

両辺に $(r+r_1)^2(r+r_2)^2(r+r_3)^2$ を掛けて，r について整理すると（途中計算略），

$$\{r_1{}^2r_2{}^2+r_2{}^2r_3{}^2+r_3{}^2r_1{}^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\}r^2-2r_1r_2r_3(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)r+r_1{}^2r_2{}^2r_3{}^2=0\quad\cdots①$$

両辺を $r_1{}^2r_2{}^2r_3{}^2$ で割ると，

$$\{r_1{}^2r_2{}^2+r_2{}^2r_3{}^2+r_3{}^2r_1{}^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\}\left(\frac{r}{r_1r_2r_3}\right)^2-2(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\cdot\frac{r}{r_1r_2r_3}+1=0$$

$$\frac{r}{r_1r_2r_3}=\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1\pm\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^2-\{r_1{}^2r_2{}^2+r_2{}^2r_3{}^2+r_3{}^2r_1{}^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\}}}{r_1{}^2r_2{}^2+r_2{}^2r_3{}^2+r_3{}^2r_1{}^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$$

$$=\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1\pm2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{r_1{}^2r_2{}^2+r_2{}^2r_3{}^2+r_3{}^2r_1{}^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$$

分母分子に $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1\mp2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$ を掛け，約分すると，

$$\frac{r}{r_1r_2r_3}=\frac{1}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1\mp2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$$

題意に適するのは，$\dfrac{r}{r_1r_2r_3}=\dfrac{1}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$

よって，$r=\dfrac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$　$\cdots②$

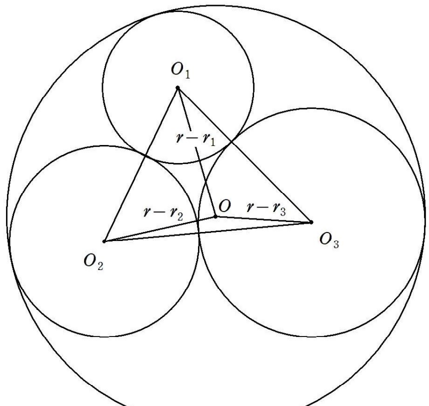
この結果は，$\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}+\dfrac{1}{r}\right)^2=2\left(\dfrac{1}{{r_1}^2}+\dfrac{1}{{r_2}^2}+\dfrac{1}{{r_3}^2}+\dfrac{1}{r^2}\right)$ …③を満たす。

（∵）③の両辺に ${r_1}^2{r_2}^2{r_3}^2r^2$ を掛けて，右辺から左辺を引くと①の左辺が得られる。

[2] の証明

[1] と同様に，$\angle O_2OO_3=\alpha$，$\angle O_3OO_1=\beta$，$\angle O_1OO_2=\gamma$ とおく。

$\triangle OO_2O_3$ に余弦定理を適用して，



$$\cos\alpha=\frac{(r-r_2)^2+(r-r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r-r_2)(r-r_3)}=\frac{r^2-(r_2+r_3)r-r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}$$
$$=1-\frac{2r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}$$

同様に，$\cos\beta=1-\dfrac{2r_3r_1}{(r-r_3)(r-r_1)}$，$\cos\gamma=1-\dfrac{2r_1r_2}{(r-r_1)(r-r_2)}$

これらを補題の等式に代入すると，

$$\left\{1-\frac{2r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}\right\}^2+\left\{1-\frac{2r_3r_1}{(r-r_3)(r-r_1)}\right\}^2+\left\{1-\frac{2r_1r_2}{(r-r_1)(r+-r_2)}\right\}^2$$
$$-2\left\{1-\frac{2r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}\right\}\left\{1-\frac{2r_3r_1}{(r-r_3)(r-r_1)}\right\}\left\{1-\frac{2r_1r_2}{(r-r_1)(r-r_2)}\right\}-1=0$$

両辺に $(r+r_1)^2(r+r_2)^2(r+r_3)^2$ を掛けて，r について整理すると（途中計算略），

$$\{{r_1}^2{r_2}^2+{r_2}^2{r_3}^2+{r_3}^2{r_1}^2+2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\}r^2-2r_1r_2r_3(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)r+{r_1}^2{r_2}^2{r_3}^2=0 \quad \cdots④$$

両辺を ${r_1}^2{r_2}^2{r_3}^2$ で割ると，

$$\{{r_1}^2{r_2}^2+{r_2}^2{r_3}^2+{r_3}^2{r_1}^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\}\left(\frac{r}{r_1r_2r_3}\right)^2+2(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\cdot\frac{r}{r_1r_2r_3}+1=0$$

$$\frac{r}{r_1r_2r_3}=\frac{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\pm\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^2-\{{r_1}^2{r_2}^2+{r_2}^2{r_3}^2+{r_3}^2{r_1}^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\}}}{{r_1}^2{r_2}^2+{r_2}^2{r_3}^2+{r_3}^2{r_1}^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$$
$$=\frac{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\pm2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{{r_1}^2{r_2}^2+{r_2}^2{r_3}^2+{r_3}^2{r_1}^2-2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$$

分母分子に $-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\mp2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$ を掛け，約分すると，

$$\frac{r}{r_1r_2r_3}=\frac{1}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\mp2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$$

$\dfrac{r}{r_1r_2r_3}>0$より，$\dfrac{r}{r_1r_2r_3}=\dfrac{1}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$

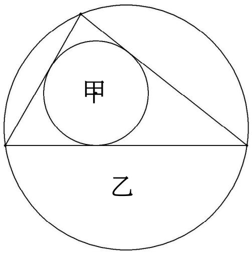
よって，$r=\dfrac{r_1r_2r_3}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$ …⑤

この結果は，$\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}-\dfrac{1}{r}\right)^2=2\left(\dfrac{1}{{r_1}^2}+\dfrac{1}{{r_2}^2}+\dfrac{1}{{r_3}^2}+\dfrac{1}{r^2}\right)$ …⑥を満たす。

（∵）⑥の両辺に ${r_1}^2{r_2}^2{r_3}^2r^2$ を掛けて，右辺から左辺を引くと④の左辺が得られる。

問題 2

三角形に内接する甲円と外接する乙円があり，
甲の半径を四寸，乙の半径を九寸とする。
甲円乙円の中心間の距離を求めよ。



解答　オイラー・チャップルの定理（8 ページ以降を参照のこと）により，

甲円，乙円の半径をそれぞれ r， R，中心間の距離を d とすると，$d^2=R^2-2Rr$ であるから，

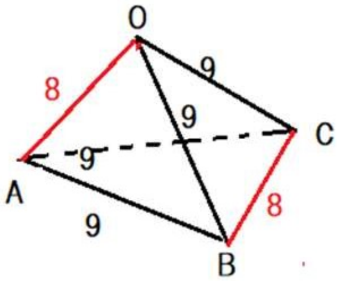
$d=\sqrt{9^2-2\cdot 9\cdot 4}=3$

よって，甲円乙円の中心間の距離は，三寸　答

問題 3

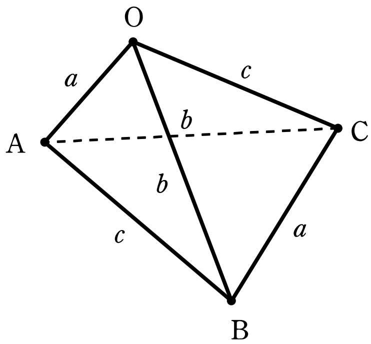
図のように三辺の長さが八，九，九
である等面四面体 OABC がある。
次の値を求めよ。

(1)　四面体 OABC の体積
(2)　四面体 OABC の外接球の半径
(3)　四面体 OABC の内接球の半径

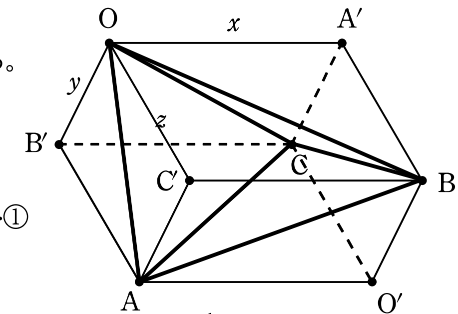


一般化して考える。
四面体 O−ABC について，OA=BC= a，
OB=CA= b，OC=AB= c とする。

(1)　四面体の体積 V_{O-ABC} を求めよ。
(2)　四面体の外接球の半径 R を求めよ。
(3)　四面体の内接球の半径 r を求めよ。



解答



(1)　この四面体の 4 個の頂点を頂点にもつ直方体 OC′BA′−B′AO′C を考える。

OA′= x，OB′= y，OC′= z とおくと，三平方の定理により，

$y^2+z^2=a^2$， $z^2+x^2=b^2$， $x^2+y^2=c^2$

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=p$ とおくと， $x^2=p-a^2$， $y^2=p-b^2$， $z^2=p-c^2$　…①

である。

また，直方体の体積 $V_{OC'BA'-B'AO'C}=xyz$， $V_{O'-ABC}=V_{A'-OBC}=V_{B'-OCA}=V_{C'-OAB}=\dfrac{1}{6}xyz$

$$V_{O-ABC}=V_{OC'BA'-B'AO'C}-V_{O'-ABC}-V_{A'-OBC}-V_{B'-OCA}-V_{C'-OAB}=xyz-\frac{1}{6}xyz\times 4=\frac{1}{3}xyz$$

$$=\frac{\sqrt{(p-a^2)(p-b^2)(p-c^2)}}{3}\quad (\because ①)$$　答

(2)　四面体 と直方体の外接球は同じであるから，①より，$R=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{OO'}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{\sqrt{p}}{2}$　答

(3)　四面体の内接球の中心を I とすると，

$$V_{O-ABC}=V_{I-ABC}+V_{I-OBC}+V_{I-OCA}+V_{I-OAB}=\frac{1}{3}rS_{ABC}+\frac{1}{3}rS_{OBC}+\frac{1}{3}rS_{OCA}+\frac{1}{3}rS_{OAB}$$

ここで，$S_{ABC}=S_{OBC}=S_{OCA}=S_{OAB}=S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ （$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，ヘロンの公式）であるから，

$V_{O-ABC}=\dfrac{1}{3}rS\times 4$ より，$r=\dfrac{3V_{O-ABC}}{4S}=\dfrac{3\sqrt{(p-a^2)(p-b^2)(p-c^2)}}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ 答

さて，問題3では，$a=8$, $b=c=9$ のときであるから，

$p=\dfrac{8^2+9^2\times 2}{2}=113$ より，$V_{O-ABC}=\dfrac{\sqrt{(p-a^2)(p-b^2)(p-c^2)}}{3}=\dfrac{\sqrt{(113-8^2)(113-9^2)^2}}{3}=\dfrac{224}{3}$，

$R=\dfrac{\sqrt{p}}{2}=\dfrac{\sqrt{113}}{2}$，

$s=\dfrac{8+9\times 2}{2}=13$ より，$S=\sqrt{13\cdot 5\cdot 4^2}=4\sqrt{65}$ であるから，$r=\dfrac{3V_{O-ABC}}{4S}=\dfrac{3\cdot\dfrac{224}{3}}{4\cdot 4\sqrt{65}}=\dfrac{14}{\sqrt{65}}$

四面体の体積：$\dfrac{224}{3}$，四面体の外接球の半径：$\dfrac{\sqrt{113}}{2}$，四面体の内接球の半径：$\dfrac{14}{\sqrt{65}}$ 答

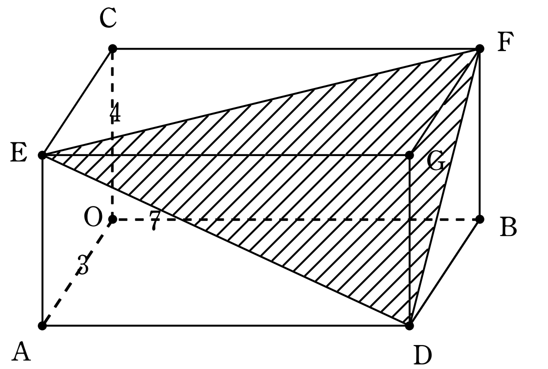
問題 4

図のように三辺の長さが三，四，七である直方体の中に四面体 DEFG がある。
次の値を求めよ。

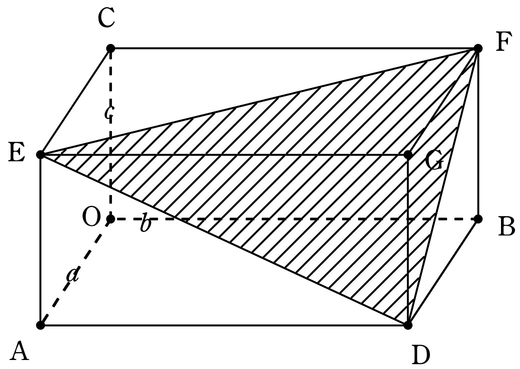
(1) 四面体 DEFG の表面積

(2) 四面体 DEFG の外接球の半径

(3) 四面体 DEFG の内接球の半径



解答



(1) OA$=a$，OB$=b$，OC$=c$ の場合の直方体を考える。

$\triangle$GED$=\dfrac{1}{2}bc$，$\triangle$GDF$=\dfrac{1}{2}ca$，$\triangle$GFE$=\dfrac{1}{2}ab$ である。

$\triangle$FED の面積を求めるために，GF，GE，GD を x 軸，y 軸，z 軸にとり，空間座標で考える。

G$(0,\ 0,\ 0)$，F$(a,\ 0,\ 0)$，E$(0,\ b,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ c)$ であるから，

平面 FED の方程式は，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0$

原点から平面 FEDに下した垂線の長さを h とすると，

$$h=\frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

四面体 DEFG の体積 $V_{DEFG}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{FED}\times h=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{FED}\times\dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}=\dfrac{1}{6}abc$ より，

$\triangle$FED$=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$

よって，四面体 DEFG の表面積 S は，

$S=\triangle\mathrm{GED}+\triangle\mathrm{GDF}+\triangle\mathrm{GFE}+\triangle\mathrm{FED}=\dfrac{1}{2}\left(bc+ca+ab+\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\right)$ 答

特に，$b=a+c$ のとき，

$$S=\frac{1}{2}\left\{b(a+c)+ac+\sqrt{(a^2+c^2)b^2+a^2c^2}\right\}=\frac{1}{2}\left\{(a+c)^2+ac+\sqrt{(a^2+c^2)(a+c)^2+a^2c^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{a^2+3ac+c^2+\sqrt{(a^2+c^2)^2+2ac(a^2+c^2)+a^2c^2}\right\}=\frac{1}{2}\left\{a^2+3ac+c^2+(a^2+c^2+ac)\right\}$$

$$=(a+c)^2=b^2$$ 答

(2)　四面体 DEFG と直方体 OADB−CEGF の外接球は同じであるから，その半径 R は，

$R=\dfrac{1}{2}\mathrm{GO}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 答

特に，$b=a+c$ のとき，$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+(a+c)^2-2ac}=\sqrt{\dfrac{b^2-ac}{2}}$

(3)　四面体 DEFG の体積を V_{DEFG}，四面体 DEFG の表面積を S，四面体 DEFG の内接球の半径を r とすると，

$V_{DEFG}=\dfrac{1}{3}Sr$ より，

$$r=\frac{3V_{DEFG}}{S}=\frac{3\cdot\frac{1}{6}abc}{\frac{1}{2}\left(bc+ca+ab+\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\right)}=\frac{bc+ca+ab-\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}{2(a+b+c)}$$ 答

特に，$b=a+c$ のとき，$r=\dfrac{(a+c)^2+ac-(a^2+c^2+ac)}{2\cdot 2b}=\dfrac{ac}{2b}$ 答

さて，問題 4 では，$a=3$，$b=7$，$c=4$ のとき，$b=a+c$ であるから，

(1)　$b^2=49$　　(2)　$\sqrt{\dfrac{b^2-ac}{2}}=\dfrac{\sqrt{74}}{2}$　　(3)　$\dfrac{ac}{2b}=\dfrac{6}{7}$ 答

追加問題 1

$n^3=m^3+2m^2-99m+2024$ を満たす整数 m，n の値をすべて求めよ。

解答　$n^3=m^3+2m^2-99m+2024$　…①とおく。

どのような m に対しても，$m^3<n^3<(m+1)^3$　…②を満たす n は存在しない。

この不等式に，①を代入すると，

$m^3<n^3$ より，$m^3<m^3+2m^2-99m+2024$　　$2m^2-99m+2024>0$

左辺の 2 次式の判別式を D とすると，$D=(-99)^2-4\cdot2\cdot2024<0$ より，すべての m で成り立つ。　…③

$n^3<(m+1)^3$ より，$m^3+2m^2-99m+2024<m^3+3m^2+3m+1$　　$m^2+102m-2023>0$

$(m+119)(m-17)>0$　　$\therefore m<-119$，$17<m$　…④

③，④より，④のとき，②を満たす n は存在しないから，n が存在するためには，$-119\leqq m\leqq17$ でなければならない。

①を変形すると，$n^3=(m+1)^3-(m^2+102m-2023)=(m+1)^3-(m+119)(m-17)$

移項すると，$(m+1)^3-n^3=(m+119)(m-17)$　…①′

この式から，$m=-119,\ 17$ のときは，右辺が 0 になるので，$(m,\ n)=(-119,\ -118)$，$(17,\ 18)$ は①を満たす。

次に，$-119<m<17$ の場合を調べる。

①′の左辺を因数分解すると，$(m+1-n)\{(m+1)^2+(m+1)n+n^2\}=(m+119)(m-17)$

$m+1-n$ ，$(m+1)^2+(m+1)n+n^2$ ，$m+119$ ，$m-17$ はどれも整数であるから，

$m+1-n$ は $(m+119)(m-17)$ の約数より，次の 8 通りの場合が考えられる。

[1]　$m+1-n=1$ のとき，$n=m$　①より，$2m^2-99m+2024=0$

これは，実数解をもたない（判別式≦0）から不適。

[2]　$m+1-n=-1$ のとき，$n=m+2$　①より，$4m^2+111m-2016=0$

これは実数解をもつが，整数解でないので不適。

[3]　$m+1-n=m+119$ のとき，$n=-118$　これは、すでに適することが分かっている。

[4]　$m+1-n=-(m+119)$ のとき，①より，$(m+119)(7m^2+605m+14504)=0$

$m=-119$ のとき，すでに適することが分かっている。（2 次方程式は実数解をもたない。）

[5]　$m+1-n=m-17$ のとき，$n=18$　これは、すでに適することが分かっている。

[6]　$m+1-n=-(m-17)$ のとき，$n=2m-16$　①より，$(m-17)(7m^2-75m+360)=0$

$m=17$ のとき，すでに適することが分かっている。（2 次方程式は実数解をもたない。）

[7]　$m+1-n=(m+119)(m-17)$ のとき，①より，

$(m+119)(m-17)(m^4+201m^3+6052m^2-406923m+4098600)=0$

$m=-119,\ 17$ のとき，すでに適することが分かっている。（4 次方程式は実数解をもたない。）

[8]　$m+1-n=-(m+119)(m-17)$ のとき，

$(m+119)(m-17)(m^4+207m^3+6670m^2-418449m+4086464)=0$

$m=-119,\ 17$ のとき，すでに適することが分かっている。（4 次方程式は実数解をもたない。）

以上により，①を満たす m ，n の値は，$(m,\ n)=(-119,\ -118)$ ，$(17,\ 18)$　答

追加問題 2

n を正の整数とする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{2024}(-x-x^2-\cdots-x^n)^{k-1}$ の x^{2023} の係数が 1 となる最小の n の値を求めよ。

解答　$-x-x^2-\cdots-x^n\neq 1$ なる x に対して，

与式は，初項 1，公比 $-x-x^2-\cdots-x^n$ ，項数 2024 の等比数列の和であるから，

$$与式=\frac{1-(-x-x^2-\cdots-x^n)^{2024}}{1-(-x-x^2-\cdots-x^n)}=\frac{1-(-x-x^2-\cdots-x^n)^{2024}}{1+x+x^2+\cdots+x^n}$$

$$=\frac{(1-x)\{1-(-x-x^2-\cdots-x^n)^{2024}\}}{1-x^{n+1}}$$

さらに，$|x|<1$ なる x に対して，$\dfrac{1}{1-x^{n+1}}=1+x^{n+1}+x^{2n+2}+x^{3n+3}+\cdots$ であるから，

$$与式=(1-x)\{1-(-x-x^2-\cdots-x^n)^{2024}\}(1+x^{n+1}+x^{2n+2}+x^{3n+3}+\cdots)$$

$$=(1-x)(1+x^{n+1}+x^{2n+2}+x^{3n+3}+\cdots)-(1-x)(-x-x^2-\cdots-x^n)^{2024}(1+x^{n+1}+x^{2n+2}+x^{3n+3}+\cdots)$$

後項の部分からは x^{2023} の項は現れないから，前項の部分を考える。

$(1-x)(1+x^{n+1}+x^{2n+2}+x^{3n+3}+\cdots)=(1+x^{n+1}+x^{2n+2}+x^{3n+3}+\cdots)-(x+x^{n+2}+x^{2n+3}+x^{3n+4}+\cdots)$ より，

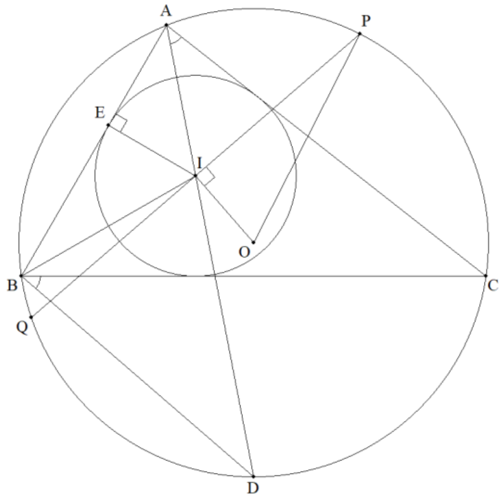
係数が 1 になるのは，$x^{(n+1)m}$ の項である。（$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）

$(n+1)m=2023=7\cdot 17^2$ であるから，これを満たす最小の正の整数 n は，$n+1=7$ より，$n=6$　答

オイラー・チャップルの定理

1　オイラー・チャップルの定理

△ABC の内接円，外接円の中心(半径)をそれぞれ I(r)，O(R)とし，IO＝d とすると，$d^2=R^2-2rR$ である。



（証明 1）

I を通り，OI に垂直な弦を PQ とすると，
△OPI は∠PIO＝90°の直角三角形であるから，
三平方の定理より　$PI^2=R^2-d^2$　…①
方べきの定理より　$AI\cdot ID=PI\cdot IQ=PI^2$　…②
①，②より　$AI\cdot ID=R^2-d^2$　…③
次に，AI と外接円の交点を D，AB と内接円の接点を E とする。
△DIB について

∠DIB＝∠IAB＋∠IBA＝$\frac{1}{2}$∠A＋$\frac{1}{2}$∠B

∠DBI＝∠DBC＋∠CBI＝∠DAC＋∠CBI＝$\frac{1}{2}$∠A＋$\frac{1}{2}$∠B

よって，∠DIB＝∠DBI より△DIB は二等辺三角形であるから，ID＝BD　…④

△AIE は直角三角形であるから　$\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{AI}$　…⑤

△ABD に正弦定理を適用すると　$2R=\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{ID}{\frac{r}{AI}}$(④，⑤より)$=\frac{AI\cdot ID}{r}$

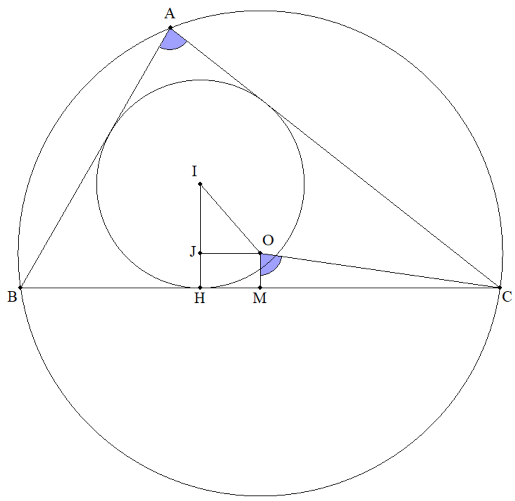
分母を払うと　$AI\cdot ID=2rR$　…⑥

①，⑥より　$2rR=R^2-d^2$　$\therefore d^2=R^2-2rR$　■

（証明 2）

I，O から BC に下した垂線の足をそれぞれ H，M とし，O から IH に下した垂線の足を J とする。
∠COM＝A，OC＝R より
OM＝$R\cos A$ であるから，IJ＝$r-R\cos A$，

HM＝$BM-BH=\frac{a}{2}-(s-b)=\frac{b-c}{2}$



△AIJ は直角三角形であるから

$$(r-R\cos A)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2=d^2\quad\cdots①$$

左辺＝$r^2-2rR\cos A+R^2\cos^2 A+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$

$$=r^2-2rR+2rR(1-\cos A)+R^2(1-\sin^2 A)+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$=R^2-2rR+r^2+2rR\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)-(R\sin A)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$= R^2 - 2rR + \left(\frac{S}{s}\right)^2 + 2rR\cdot\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$= R^2 - 2rR + \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + 2rR\cdot\frac{4(s-b)(s-c)}{2bc} - (s-b)(s-c) = R^2 - 2rR + (s-b)(s-c)\left(\frac{s-a}{s} + \frac{4rR}{bc} - 1\right)$$

$$= R^2 - 2rR + (s-b)(s-c)\left(\frac{4rR}{bc} - \frac{a}{s}\right) = R^2 - 2rR + (s-b)(s-c)\cdot\frac{4R}{bcs}\left(rs - \frac{abc}{4R}\right) = R^2 - 2rR + (s-b)(s-c)\cdot\frac{4R}{bcs}(S-S)$$

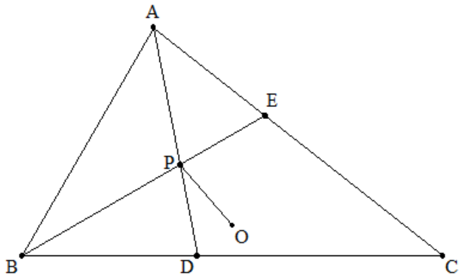
$$= R^2 - 2rR$$

よって①は，$R^2 - 2rR = d^2$ $\quad\therefore d^2 = R^2 - 2rR$ ■

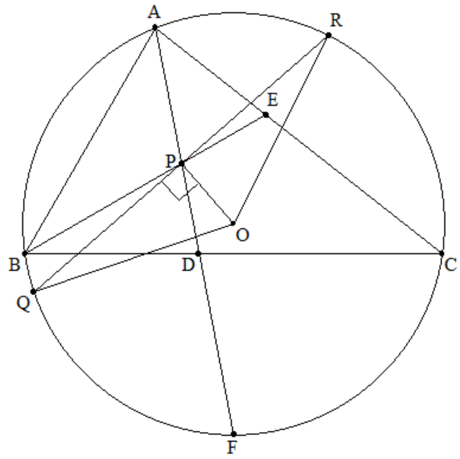
2　補題：三角形内の任意の点と外心との距離の公式

△ABC の外接円の中心を O，半径を R とする。△ABC 内に任意に点 P をとり，AP と BC の交点を D，BP と CA の交点を E とする。
BD＝a_1，DC＝a_2，CE＝b_1，EA＝b_2，OP＝d とおくと，

$$d^2 = R^2 - \frac{a_1 b_2\left(a_2 b_2 a^2 + a_1 b_1 b^2 + a_2 b_1 c^2\right)}{(ab_2 + a_1 b_1)^2}$$



（証明）AD の延長と外接円との交点を F，点 P を通り，OP に垂直な外接円の弦を図のように QR とする。QP＝PR である。



△OPQ は直角三角形であるから三平方の定理より

$PQ^2 = R^2 - d^2$ ・・・①

方べきの定理より　$AP\cdot PF = QP\cdot PR = PQ^2$ ・・・②

①，②より　$AP\cdot PF = R^2 - d^2$ ・・・③

AD＝l とおく。

スチュアートの定理より（*）　$a\left(l^2 + a_1 a_2\right) = a_1 b^2 + a_2 c^2$

$\therefore l^2 = \dfrac{a_1 b^2 + a_2 c^2 - a_1 a_2 a}{a}$ ・・・④

メネラウスの定理より

$\dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{DB}{BC}\cdot\dfrac{CE}{EA} = 1$，$\dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{a_1}{a}\cdot\dfrac{b_1}{b_2} = 1$，$\therefore \dfrac{AP}{PD} = \dfrac{ab_2}{a_1 b_1}$

AP＝$\dfrac{ab_2}{ab_2 + a_1 b_1}l$，PD=$\dfrac{a_1 b_1}{ab_2 + a_1 b_1}l$ ・・・⑤

方べきの定理より　$AD\cdot DF = BD\cdot DC$，$l\cdot DF = a_1 a_2$，$\therefore DF = \dfrac{a_1 a_2}{l}$ ・・・⑥

⑤，⑥より　PF＝PD＋DF＝$\dfrac{a_1 b_1}{ab_2 + a_1 b_1}l + \dfrac{a_1 a_2}{l} = \dfrac{a_1\left\{b_1 l^2 + a_2\left(ab_2 + a_1 b_1\right)\right\}}{(ab_2 + a_1 b_1)l}$

ここで，④より，分子の中括弧の中＝$b_1\cdot\dfrac{a_1 b^2 + a_2 c^2 - a_1 a_2 a}{a} + a_2\left(ab_2 + a_1 b_1\right) = \dfrac{a_2 b_2 a^2 + a_1 b_1 b^2 + a_2 b_1 c^2}{a}$ であるから

PF＝$\dfrac{a_1\cdot\dfrac{a_2 b_2 a^2 + a_1 b_1 b^2 + a_2 b_1 c^2}{a}}{(ab_2 + a_1 b_1)l} = \dfrac{a_1\left(a_2 b_2 a^2 + a_1 b_1 b^2 + a_2 b_1 c^2\right)}{a(ab_2 + a_1 b_1)l}$

これと⑤を③に代入すると $\dfrac{ab_2}{ab_2+a_1b_1}l\cdot\dfrac{a_1\left(a_2b_2a^2+a_1b_1b^2+a_2b_1c^2\right)}{a\left(ab_2+a_1b_1\right)l}=R^2-d^2$

$$\therefore d^2=R^2-\frac{a_1b_2\left(a_2b_2a^2+a_1b_1b^2+a_2b_1c^2\right)}{\left(ab_2+a_1b_1\right)^2} \quad ■$$

(*) 余弦定理を用いても l^2 は求められる。△ABD において

$$l^2=c^2+a_1{}^2-2ca_1\cos B=c^2+a_1{}^2-2ca_1\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{a_1b^2+(a-a_1)c^2+(a_1-a)a_1a}{a}=\frac{a_1b^2+a_2c^2-a_1a_2a}{a}$$

(オイラー・チャップルの定理の証明 3)

補題を利用する。P が内心のとき，$a_1=\dfrac{ca}{b+c}$， $a_2=\dfrac{ab}{b+c}$， $b_1=\dfrac{ab}{c+a}$， $b_2=\dfrac{bc}{c+a}$ を公式

$d^2=R^2-\dfrac{a_1b_2\left(a_2b_2a^2+a_1b_1b^2+a_2b_1c^2\right)}{\left(ab_2+a_1b_1\right)^2}$ に代入して，

$$d^2=R^2-\frac{\dfrac{ca}{b+c}\cdot\dfrac{bc}{c+a}\left(\dfrac{ab}{b+c}\cdot\dfrac{bc}{c+a}\cdot a^2+\dfrac{ca}{b+c}\cdot\dfrac{ab}{c+a}\cdot b^2+\dfrac{ab}{b+c}\cdot\dfrac{ab}{c+a}\cdot c^2\right)}{\left(a\cdot\dfrac{bc}{c+a}+\dfrac{ca}{b+c}\cdot\dfrac{ab}{c+a}\right)^2}$$

$$=R^2-\frac{abc}{a+b+c}=R^2-\frac{abc}{2s}=R^2-2\cdot\frac{S}{s}\cdot\frac{abc}{4S}=R^2-2rR \quad ■$$

(補足) 補題の利用例

(1) P が重心のとき，$a_1=a_2=\dfrac{a}{2}$， $b_1=b_2=\dfrac{b}{2}$ であるから，公式 $d^2=R^2-\dfrac{a_1b_2\left(a_2b_2a^2+a_1b_1b^2+a_2b_1c^2\right)}{\left(ab_2+a_1b_1\right)^2}$ に代入して，

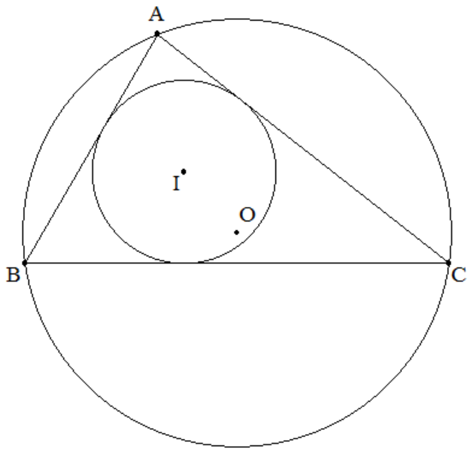
$$d^2=R^2-\frac{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\cdot a^2+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\cdot b^2+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\cdot c^2\right)}{\left(a\cdot\dfrac{b}{2}+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{b}{2}\right)^2}=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

(2) P が垂心のとき，$a_1=c\cos B$， $a_2=b\cos C$， $b_1=a\cos C$， $b_2=c\cos A$ を公式に代入し，簡単にすると $d=R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}$

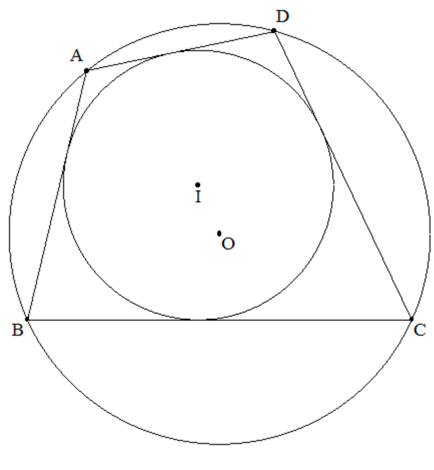
3 発展

内接円，外接円の中心(半径)をそれぞれ I(r)，O(R)とし，IO＝d とすると，

(1) 三角形のとき $\dfrac{1}{R-d}+\dfrac{1}{R+d}=\dfrac{1}{r}$



(2) 四角形のとき $\dfrac{1}{(R-d)^2}+\dfrac{1}{(R+d)^2}=\dfrac{1}{r^2}$



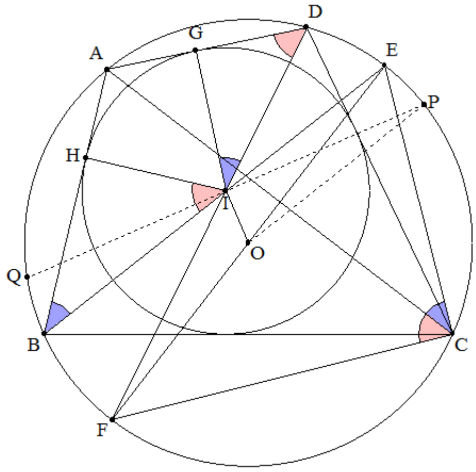
(1)の証明　オイラー・チャップルの定理から，$2rR = R^2 - d^2$

変形すると　$r\{(R+d)+(R-d)\} = (R+d)(R-d)$

両辺を$r(R+d)(R-d)$で割ると，$\dfrac{1}{R-d}+\dfrac{1}{R+d}=\dfrac{1}{r}$　■

(2)の証明（Fuss の定理）

BI，DI と外接円との交点をそれぞれ E，F とすると，3 点 E，O，F は同一直線上にある。



（∵）∠ECF＝∠ECA+∠ACF＝∠EBA+∠ADF（円周角）

$=\dfrac{1}{2}$∠B+$\dfrac{1}{2}$∠D＝90°　より　EF は直径となるから。

中線定理より

$IE^2 + IF^2 = 2(IO^2 + R^2) = 2(R^2 + d^2)$　・・・①

また，方べきの定理より

$DI \cdot IF = BI \cdot IE = R^2 - IO^2 = R^2 - d^2$　・・・②

（∵）I を通り，IO に垂直な外接円の弦を PQ とすると，

$DI \cdot IF = PI \cdot IQ = PI^2 = PO^2 - IO^2 = R^2 - d^2$ (方べきの値) となる。

②より　$IF^2 + IE^2 = \left(\dfrac{R^2-d^2}{DI}\right)^2 + \left(\dfrac{R^2-d^2}{BI}\right)^2 = (R^2-d^2)^2\left(\dfrac{1}{DI^2}+\dfrac{1}{BI^2}\right)$　・・・③

ここで，IG=IH＝r である。また，I から DA，AB に下ろした垂線の足をそれぞれ G，H とし，DG=u，HB=v とおくと，△IDG∽△BIH であるから，$u:r=r:v$ より $uv=r^2$ である。

このとき，$DI^2 = u^2 + r^2 = u^2 + uv = u(u+v)$，$BI^2 = v^2 + r^2 = v^2 + uv = v(u+v)$であるから

$\therefore \dfrac{1}{DI^2}+\dfrac{1}{BI^2}=\dfrac{1}{u(u+v)}+\dfrac{1}{v(u+v)}=\dfrac{1}{uv}=\dfrac{1}{r^2}$　・・・④

①，③，④より　$2(R^2+d^2)=(R^2-d^2)^2\cdot\dfrac{1}{r^2}$

$\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{2(R^2+d^2)}{(R^2-d^2)^2}=\dfrac{(R+d)^2+(R-d)^2}{(R+d)^2(R-d)^2}=\dfrac{1}{(R-d)^2}+\dfrac{1}{(R+d)^2}$　　$\therefore \dfrac{1}{(R-d)^2}+\dfrac{1}{(R+d)^2}=\dfrac{1}{r^2}$　■

（補足）(1)，(2)の等式から次の不等式が容易に証明できる。

(1)　$R \geqq 2r$

(2)　$R \geqq \sqrt{2}r$

（証明）

(1)　$\dfrac{1}{R-d}+\dfrac{1}{R+d}=\dfrac{1}{r}$ より，$d^2 = R^2 - 2rR = R(R-2r) \geqq 0$ であるから，$\therefore R \geqq 2r$ ■

(2)　$\dfrac{1}{(R-d)^2}+\dfrac{1}{(R+d)^2}=\dfrac{1}{r^2}$ より，$\dfrac{2(R^2+d^2)}{(R^2-d^2)^2}=\dfrac{1}{r^2}$　　$r^2=\dfrac{(R^2-d^2)^2}{2(R^2+d^2)}\leqq\dfrac{(R^2)^2}{2R^2}=\dfrac{R^2}{2}$（等号は $d=0$）

$r>0, R>0$ であるから　$R \geqq \sqrt{2}r$ ■

（2024/3/3　ジョーカー）