第438回

追加問題 1

$n^3=m^3+2m^2-99m+2024$ を満たす整数 m ， n の値をすべて求めよ。

$\boxed{解答}$ $n^3=m^3+2m^2-99m+2024$ …①とおく。

どのような m に対しても， $m^3<n^3<(m+1)^3$ …②を満たす n は存在しない。

この不等式に，①を代入すると，

$m^3<n^3$ より， $m^3<m^3+2m^2-99m+2024$ $2m^2-99m+2024>0$

左辺の 2 次式の判別式を D とすると， $D=(-99)^2-4\cdot2\cdot2024<0$ より，すべての m で成り立つ。 …③

$n^3<(m+1)^3$ より， $m^3+2m^2-99m+2024<m^3+3m^2+3m+1$ $m^2+102m-2023>0$

$(m+119)(m-17)>0$ $\therefore m<-119$ ， $17<m$ …④

③，④より，④のとき，②を満たす n は存在しないから， n が存在するためには， $-119\leqq m\leqq17$ でなければならない。

①を変形すると， $n^3=(m+1)^3-(m^2+102m-2023)=(m+1)^3-(m+119)(m-17)$

移項すると，$(m+1)^3-n^3=(m+119)(m-17)$ …①′

この式から， $m=-119,\ 17$ のときは，右辺が 0 になるので，$(m,\ n)=(-119,\ -118)$，$(17,\ 18)$ は①を満たす。

次に， $-119<m<17$ の場合を調べると， $m=-118,\ -117,\ \cdots,\ 16$ に対して， n の値が整数になる m の値はなかった。

よって，①を満たす m ， n の値は，$(m,\ n)=(-119,\ -118)$，$(17,\ 18)$ 答