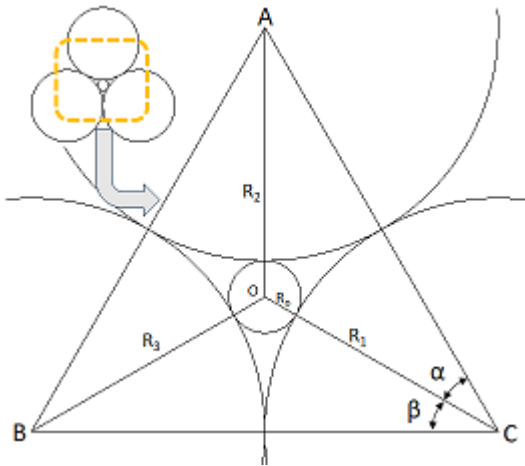


問題1



デカルトの円定理によれば、左図のように4円A, B, C, Oが互いに外接するとき、それぞれの半径を R_2, R_3, R_1, R_0 とすると、次の関係式が成り立つそうです。まずこの証明から始めます。

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_0}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_0^2}\right)$$

$\angle ACO = \alpha, \angle BCO = \beta$ として、 $\triangle ABC, \triangle AOC, \triangle BOC$ に余弦定理を適用すると、

$$\cos C = \frac{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 + R_3)^2 - (R_2 + R_3)^2}{2(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)} = \frac{R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_3 - R_2R_3}{(R_1 + R_3)(R_1 + R_2)}$$

$$\cos \alpha = \frac{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 + R_0)^2 - (R_2 + R_0)^2}{2(R_1 + R_0)(R_1 + R_2)} = \frac{R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_0 - R_2R_0}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_2)}$$

$$\cos \beta = \frac{(R_1 + R_3)^2 + (R_1 + R_0)^2 - (R_3 + R_0)^2}{2(R_1 + R_0)(R_1 + R_3)} = \frac{R_1^2 + R_1R_3 + R_1R_0 - R_3R_0}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_3)}$$

です。また、

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left\{\frac{R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_0 - R_2R_0}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_2)}\right\}^2} = \frac{2\sqrt{R_1R_2R_0(R_1 + R_2 + R_0)}}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_2)}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left\{\frac{R_1^2 + R_1R_3 + R_1R_0 - R_3R_0}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_3)}\right\}^2} = \frac{2\sqrt{R_1R_3R_0(R_1 + R_3 + R_0)}}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_3)}$$

です。すると、 $C = \alpha + \beta$ なので、

$$\cos C = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos C = 0$$

ですから、これに $\cos C, \cos \alpha, \cos \beta, \sin \alpha, \sin \beta$ を代入すると、以下の関係式が導かれます(導出過程は汚いので、最終ページに記載します)。

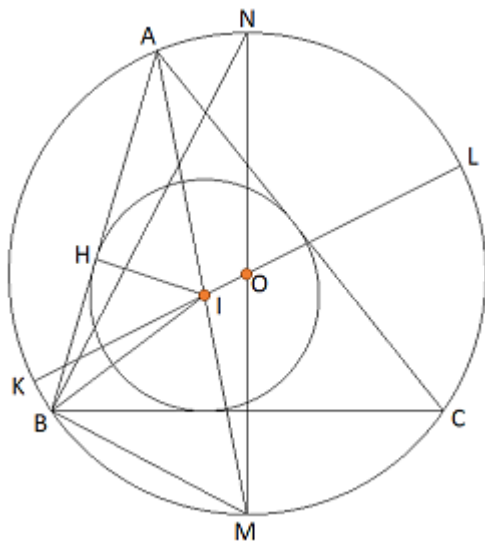
$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_0}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_0^2}\right)$$

上式に問題文の数値 $R_1 = 69, R_2 = 46, R_3 = 23$ を代入すると、

$$\left(\frac{1}{69} + \frac{1}{46} + \frac{1}{23} + \frac{1}{R_0}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{69^2} + \frac{1}{46^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{R_0^2}\right) \Rightarrow R_0 = 6, -138(\text{不適})$$

となります。よって、小円の円径は6寸です。

問題2

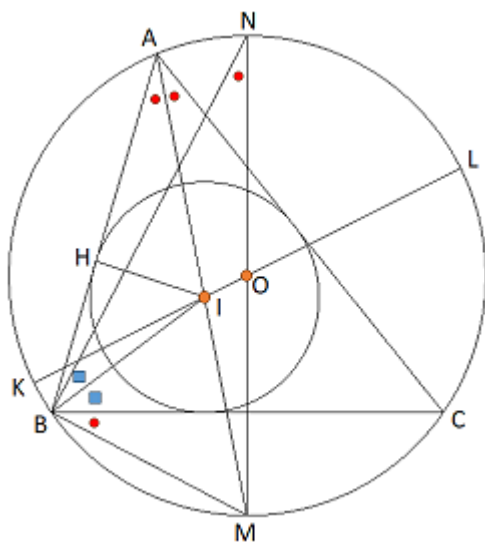


オイラー・チャップル定理によると、三角形の外接円の半径 R 、内接円の半径 r 、外心と内心の距離 d の間には、以下の関係があるそうです。

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

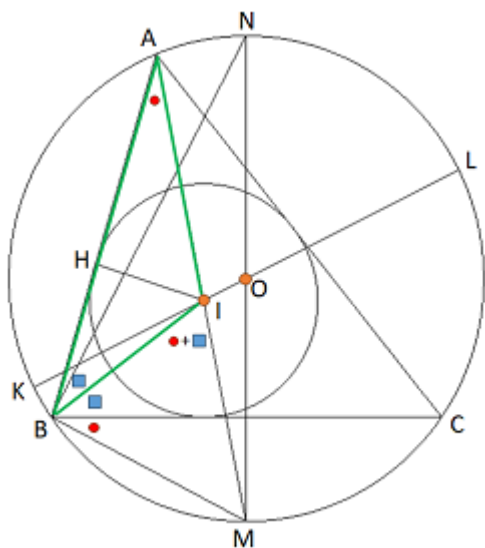
まず、これを証明します。

左図の通り $\triangle ABC$ の外心を O 、内心を I とし、 I から AB に垂直に下した点を H 、弧 BC の中点を M 、直線 IO と外接円との交点を K, L 、直線 OM と外接円との交点を N とします。



$\angle BAM$ は弧 BM の円周角ですが、これと等しい角に赤色の丸を付けます。

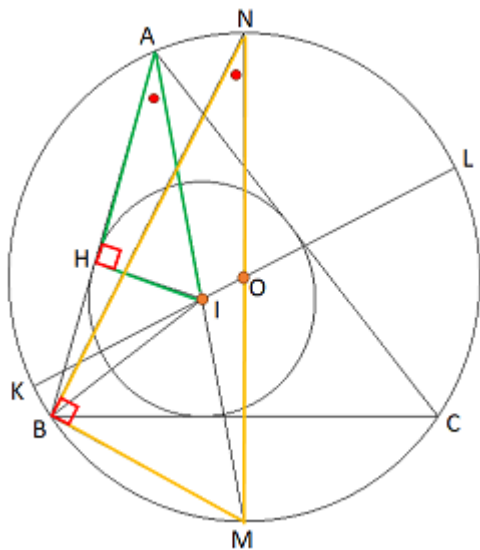
また、 IB は $\angle B$ を二等分するので、青色の四角を2つ付けておきます。



すると、緑色の $\triangle ABI$ の外角 $\angle BIM$ は $\angle HAI + \angle HBI$ なので、 $\triangle BIM$ は二等辺三角形です。ゆえに、

$$MB = MI \dots \textcircled{1}$$

です。



また、 $\angle AHI = \angle NBM = 90^\circ$ なので、緑色の $\triangle AHI$ と黄色の $\triangle NBM$ は相似となり、

$$MN : IA = MB : IH$$

$$\Rightarrow IA \cdot MB = MN \cdot IH = 2Rr$$

です。ここで、前ページの①より

$$2R = IA \cdot MB = IA \cdot IM$$

です。さらに、方べきの定理より、

$$\begin{aligned} 2R &= IA \cdot IM = IK \cdot IL = (OK - OI)(OL + OI) \\ &= (R - d)(R + d) = R^2 - d^2 \end{aligned}$$

よって、

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

です。

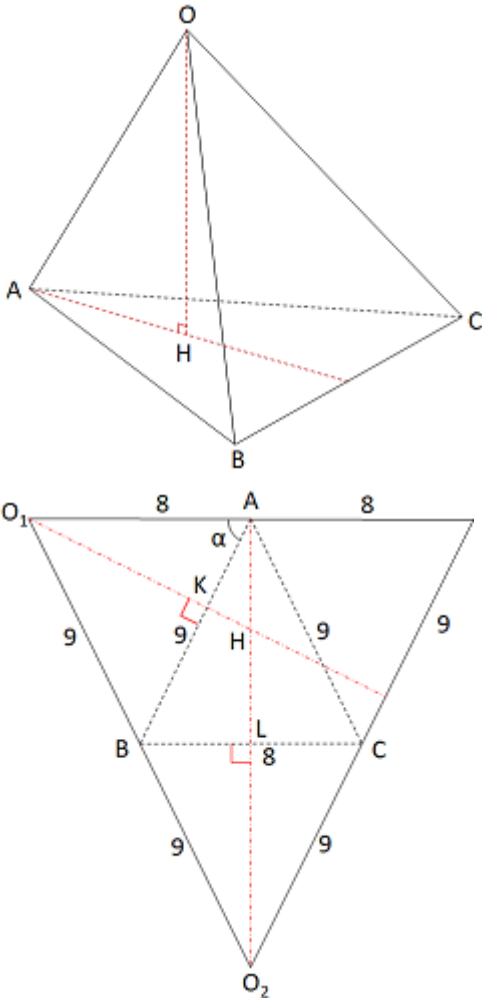
この関係式に、問題文の数値 $R = 9$ 、 $r = 4$ を代入すると、

$$d^2 = 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \Rightarrow d = 3$$

となります。よって、甲円と乙円の中心間の距離は3寸です。

問題3

(1)



左図のように頂点Oから△ABCに下した垂直に下した点をとHします。△ABCの面積をSとすると、四面体OABCの体積Vは、

$$V = \frac{1}{3}S\sqrt{OA^2 - AH^2} \dots \textcircled{1}$$

です。Sはヘロンの公式を使うと、

$$S = \frac{\sqrt{(9+8+9)(9+9-8)(9+8-9)(8+9-9)}}{4} = 4\sqrt{65}$$

です。

AHは展開図で考えます。O₁からABに垂直に下した点をK、O₂からBCに垂直に下した点をLとすると、展開図を組み立てたときに、O₁とO₂はHの頭上で合わさります。

∠O₁AB = αとして、△O₁ABに余弦定理を適用すると、

$$\cos \alpha = \frac{O_1A^2 + AB^2 - O_1B^2}{2O_1A \cdot AB}$$

なので、

$$AK = O_1A \cos \alpha = \frac{O_1A^2 + AB^2 - O_1B^2}{2AB}$$

です。

△AHKと△ABLは相似なので、

$$AK:AH = AL:AB \Rightarrow AH = \frac{AK \cdot AB}{AL} = \frac{\frac{O_1A^2 + AB^2 - O_1B^2}{2AB} \cdot AB}{\sqrt{AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}} = \frac{O_1A^2 + AB^2 - O_1B^2}{2\sqrt{AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}}$$

です。上式にO₁A = 8、O₁B = 9、AB = 9、BC = 8を代入すると、

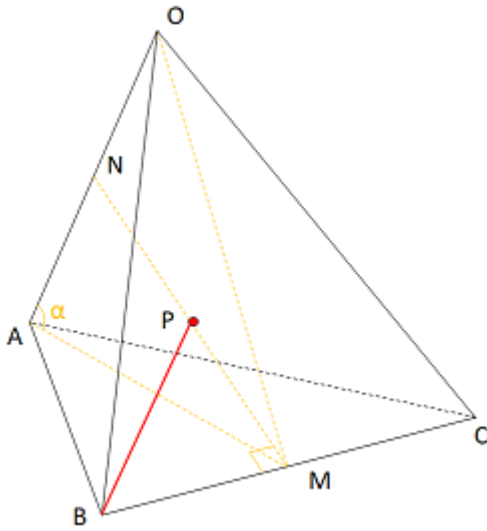
$$AH = \frac{8^2 + 9^2 - 9^2}{2\sqrt{9^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2}} = \frac{32}{\sqrt{65}}$$

です。①式にS = 4√65、OA = 8、AH = $\frac{32}{\sqrt{65}}$ を代入すると、

$$V = \frac{1}{3}S\sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{65} \cdot \sqrt{8^2 - \left(\frac{32}{\sqrt{65}}\right)^2} = \frac{224}{3}$$

です。以上より、四面体OABCの体積は $\frac{224}{3}$ です。

(2)



図形の対称性に着目します。 $OB = OC = AB = AC$ なので、 OA と BC はねじれの位置関係です。 OA 、 BC の中点をそれぞれ N 、 M とすると、 MN は OA 、 BC に垂直ですが、その中点を P とすると、 $AP = BP = CP = OP$ なので、 P は外接球の中心であることがわかります。

次に、 $OB = OC = AB = AC = a$ 、 $OA = BC = b$ 、 $OM = AM = c$ 、 $MN = d$ 、 $\angle OAM = \alpha$ として、 $\triangle OAM$ に余弦定理を適用すると、

$$\cos \alpha = \frac{OA^2 + AM^2 - OM^2}{2OA \cdot AM} = \frac{b^2 + c^2 - c^2}{2bc} = \frac{b}{2c}$$

です。

さらに、 $\triangle NAM$ にも余弦定理を適用すると、

$$NM = \sqrt{AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cos \alpha} \Rightarrow d = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot c \cdot \frac{b}{2c}} = \frac{\sqrt{4c^2 - b^2}}{2}$$

となり、

$$BP = \sqrt{BM^2 + MP^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c^2 - b^2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3b^2 + 4c^2}}{4}$$

です。ここで、

$$c = AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

なので、

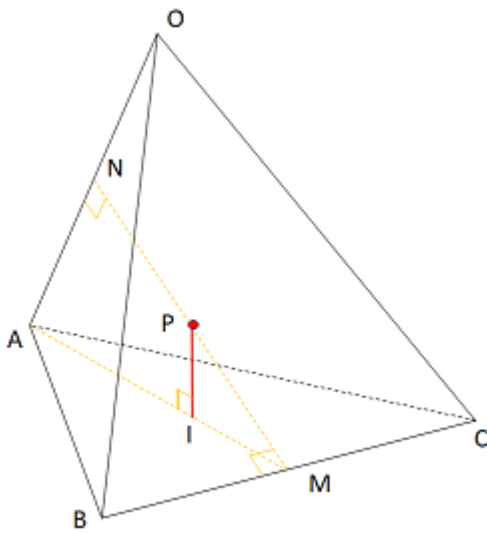
$$BP = \frac{\sqrt{3b^2 + 4c^2}}{4} = \frac{\sqrt{3b^2 + 4\left(\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}\right)^2}}{4} = \frac{\sqrt{4a^2 + 2b^2}}{4}$$

が得られます。 $a = 9$ 、 $b = 8$ を代入すると、

$$BP = \frac{\sqrt{4a^2 + 2b^2}}{4} = \frac{\sqrt{4 \cdot 9^2 + 2 \cdot 8^2}}{4} = \frac{\sqrt{113}}{2}$$

となります。以上より、四面体 $OABC$ の外接球の半径は $\frac{\sqrt{113}}{2}$ です。

(3)



この問題も図形の対称性に着目します。内接球と外接球の中心が一致していると思われるので、Pから $\triangle ABC$ に垂直に下した点をIとすると、PIが内接球の半径です。

すると、 $\triangle AMN$ と $\triangle PMI$ は相似なので、

$$AM:AN = PM:PI \Rightarrow PI = \frac{AN \cdot PM}{AM} = \frac{\frac{OA}{2} \cdot \frac{MN}{2}}{AM}$$

です。前ページの結果を利用すると、

$$c = AM = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

です。

さらに、

$$NM = \frac{\sqrt{4c^2 - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}\right)^2 - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{4a^2 - 2b^2}}{2}$$

そして、

$$PI = \frac{\frac{OA}{2} \cdot \frac{MN}{2}}{AM} = \frac{b \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - 2b^2}}{2}}{\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}} = \frac{b\sqrt{4a^2 - 2b^2}\sqrt{4a^2 - b^2}}{4(2a - b)(b + 2a)}$$

が得られます。a = 9、b = 8を代入すると、

$$PI = \frac{b\sqrt{4a^2 - 2b^2}\sqrt{4a^2 - b^2}}{4(2a - b)(b + 2a)} = \frac{b\sqrt{4 \cdot 9^2 - 2 \cdot 8^2}\sqrt{4 \cdot 9^2 - 8^2}}{4(2 \cdot 9 - 8)(2 \cdot 9 + 8)} = \frac{14}{\sqrt{65}}$$

となります。以上より、四面体OABCの内接球の半径は $\frac{14}{\sqrt{65}}$ です。

問題4

(1) $GD = a$ 、 $GE = b$ 、 $GF = c$ 、 $\triangle DGE$ の面積 = S_1 、 $\triangle DGF$ の面積 = S_2 、 $\triangle EGF$ の面積 = S_3 、 $\triangle DEF$ の面積 = S_4 、四面体 $DEFG$ の表面積 = S とします。 $S_1 \sim S_3$ は普通に求めて、

$$S_1 = \frac{ab}{2}, S_2 = \frac{ac}{2}, S_3 = \frac{bc}{2}$$

です。 $\triangle DEF$ を各座標平面に投影すると、 $\triangle DGE$ 、 $\triangle DGF$ 、 $\triangle EGF$ になりますから、補足に記載した関係を用いると、

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4}$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2}$$

なので、

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2}$$

$$= \frac{ab + ac + bc + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2}$$

です。上式に $a = 4$ 、 $b = 7$ 、 $c = 3$ を代入すると、

$$S = \frac{ab + ac + bc + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2} = \frac{4 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + \sqrt{4^2 7^2 + 4^2 3^2 + 7^2 3^2}}{2} = 49$$

です。以上より、四面体 $DEFG$ の表面積 = 49です。

補足 直交系 $\mathbf{e}_x = (1,0,0)$ 、 $\mathbf{e}_y = (0,1,0)$ 、 $\mathbf{e}_z = (0,0,1)$ のとき、 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_x + a_2\mathbf{e}_y + a_3\mathbf{e}_z$ 、 $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_x + b_2\mathbf{e}_y + b_3\mathbf{e}_z$ とすると、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2$$

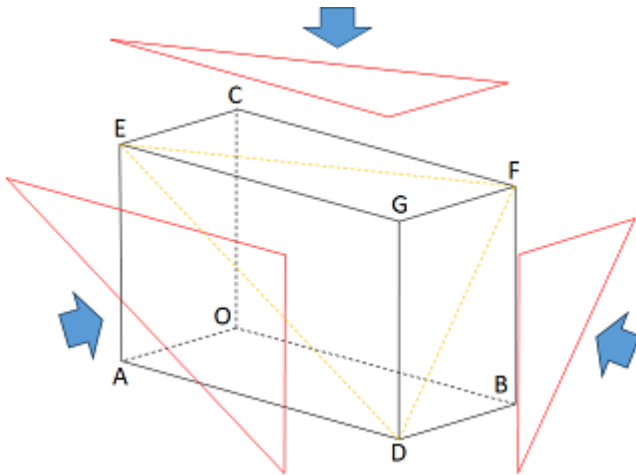
$$\Rightarrow \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{4} = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2}{4} + \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2}{4} + \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2}{4}$$

です。ここで、 $A(a_1, a_2, a_3)$ 、 $B(b_1, b_2, b_3)$ 、 $O(0,0,0)$ とすると、左辺は $\triangle ABC$ の面積の平方 S^2 、右辺の第1項目は yz 平面に投影した面積の平方 S_x^2 、第2項目は zx 平面に投影した面積の平方 S_y^2 、第3項目は xy 平面に投影した面積の平方 S_z^2 です。よって、

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

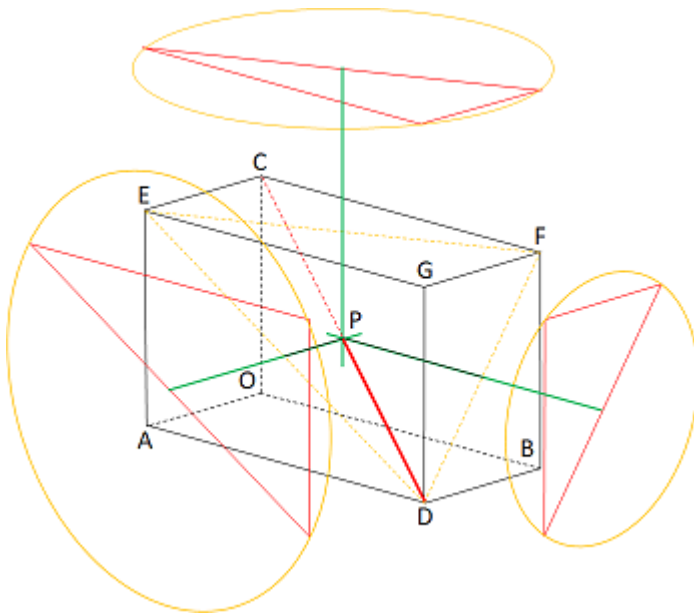
です。

(2)



四面体 DEFG の側面が各座標平面と平行になっていることに着目します。

そして、左図のように、矢印方向から見れば、DEFG を赤の直角三角形で捉えることができます。



各投影面からみると、外接球は直角三角形の外接円に見えますが、その中心は直角三角形の斜辺の中点です。

その中点から DEFG の側面に垂直な直線を引くと、P で交わります。これが外接球の中心で、 $DP = EP = FP$ がその半径となります。よって、

$$DP = \frac{DC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

です。上式に $a = 4$ 、 $b = 7$ 、 $c = 3$ を代入すると、

$$DP = \frac{\sqrt{4^2 + 7^2 + 3^2}}{2} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

以上より、四面体 DEFG の外接球の半径 $= \frac{\sqrt{74}}{2}$ です。

(3) 作図での解法を試みましたが、できませんでした。月並みですが、次のようにやりました。

内接球の中心をI、半径をr、四面体 DEFGの体積V、四面体 IGEDの体積 V_1 、四面体 IGDFの体積 V_2 、四面体 IGFEの体積 V_3 、四面体 IDEFの体積 V_4 、四面体 DEFGの表面積 = S、 $\triangle GED$ の面積 = S_1 、 $\triangle GDF$ の面積 = S_2 、 $\triangle GFE$ の面積 = S_3 、 $\triangle DEF$ の面積 = S_4 とすると、

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{S_1 r}{3} + \frac{S_2 r}{3} + \frac{S_3 r}{3} + \frac{S_4 r}{3} = \frac{Sr}{3}$$

です。 $V = \frac{3 \times 4 \times 7}{6} = 14$ 、 $S = 49$ なので、

$$V = \frac{Sr}{3} \Rightarrow 14 = \frac{49r}{3} \Rightarrow r = \frac{6}{7}$$

以上より、四面体 DEFGの内接球の半径 = $\frac{6}{7}$ です。

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos C = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_0} \right)^2 = 2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_0^2} \right) \text{の計算過程}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_0 - R_2R_0}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_2)} \cdot \frac{R_1^2 + R_1R_3 + R_1R_0 - R_3R_0}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_3)} - \frac{2\sqrt{R_1R_2R_0(R_1 + R_2 + R_0)}}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_2)} \cdot \frac{2\sqrt{R_1R_3R_0(R_1 + R_3 + R_0)}}{(R_1 + R_0)(R_1 + R_3)} - \frac{R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_3 - R_2R_3}{(R_1 + R_3)(R_1 + R_2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(R_1 + R_3)(R_1 + R_2)(R_1 + R_0)^2} \left\{ (R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_0 - R_2R_0)(R_1^2 + R_1R_3 + R_1R_0 - R_3R_0) - 2\sqrt{R_1R_2R_0(R_1 + R_2 + R_0)}2\sqrt{R_1R_3R_0(R_1 + R_3 + R_0)} - (R_1 + R_0)^2R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_3 - R_2R_3 \right\} = 0$$

$$\Rightarrow (R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_0 - R_2R_0)(R_1^2 + R_1R_3 + R_1R_0 - R_3R_0) - 2\sqrt{R_1R_2R_0(R_1 + R_2 + R_0)}2\sqrt{R_1R_3R_0(R_1 + R_3 + R_0)} - (R_1 + R_0)^2R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_3 - R_2R_3 = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{R_1R_2R_0(R_1 + R_2 + R_0)}2\sqrt{R_1R_3R_0(R_1 + R_3 + R_0)} = (R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_0 - R_2R_0)(R_1^2 + R_1R_3 + R_1R_0 - R_3R_0) - (R_1 + R_0)^2R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_3 - R_2R_3$$

左辺² - 右辺²とすると、

$$\Rightarrow 4(R_1 + R_0)^2(R_3^2R_2^2R_1^2 + R_0^2R_2^2R_1^2 + R_0^2R_3^2R_1^2 + R_0^2R_3^2R_2^2 - 2R_0R_3R_2^2R_1^2 - 2R_0R_3^2R_2R_1^2 - 2R_0^2R_3R_2R_1^2 - 2R_0R_3^2R_2^2R_1 - 2R_0^2R_3R_2^2R_1 - 2R_0^2R_3^2R_2R_1) = 0$$

$$\Rightarrow 4(R_1 + R_0)^2R_3^2R_2^2R_1^2R_0^2 \left\{ \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_1^2} - \frac{2}{R_0R_3} - \frac{2}{R_0R_2} - \frac{2}{R_3R_2} - \frac{2}{R_0R_1} - \frac{2}{R_3R_1} - \frac{2}{R_2R_1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_1^2} - \frac{2}{R_0R_3} - \frac{2}{R_0R_2} - \frac{2}{R_3R_2} - \frac{2}{R_0R_1} - \frac{2}{R_3R_1} - \frac{2}{R_2R_1} = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_0^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_0} \right)^2 = 2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_0^2} \right)$$