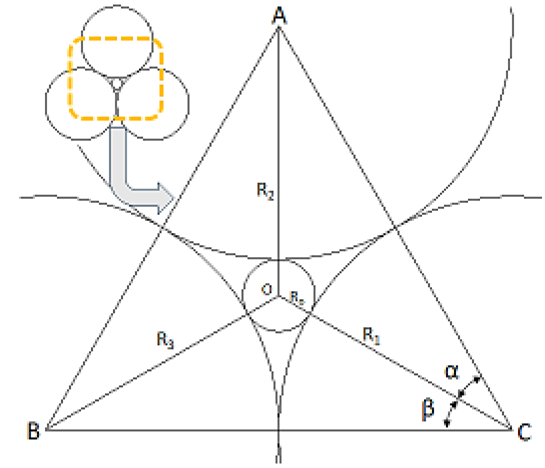
問題1



デカルトの円定理によれば、左図のように４円A, B, C, Oが互いに外接するとき、それぞれの半径をR_2、R_3、R_1、R_oとすると、次の関係式が成り立つそうです。まずこれの証明から始めます。

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_o}\right)^2$$
$$=2\left(\frac{1}{{R_1}^2}+\frac{1}{{R_2}^2}+\frac{1}{{R_3}^2}+\frac{1}{{R_o}^2}\right)$$

$\angle ACO=\alpha$、$\angle BCO=\beta$として、⊿ABC、⊿AOC、⊿BOCに余弦定理を適用すると、

$$\cos C=\frac{(R_1+R_2)^2+(R_1+R_3)^2-(R_2+R_3)^2}{2(R_1+R_2)(R_1+R_3)}=\frac{{R_1}^2+R_1R_2+R_1R_3-R_2R_3}{(R_1+R_3)(R_1+R_2)}$$
$$\cos\alpha=\frac{(R_1+R_2)^2+(R_1+R_o)^2-(R_2+R_o)^2}{2(R_1+R_o)(R_1+R_2)}=\frac{{R_1}^2+R_1R_2+R_1R_o-R_2R_o}{(R_1+R_o)(R_1+R_2)}$$
$$\cos\beta=\frac{(R_1+R_3)^2+(R_1+R_o)^2-(R_3+R_o)^2}{2(R_1+R_o)(R_1+R_3)}=\frac{{R_1}^2+R_1R_3+R_1R_o-R_3R_o}{(R_1+R_o)(R_1+R_3)}$$

です。また、

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left\{\frac{{R_1}^2+R_1R_2+R_1R_o-R_2R_o}{(R_1+R_o)(R_1+R_2)}\right\}^2}=\frac{2\sqrt{R_1R_2R_o(R_1+R_2+R_o)}}{(R_1+R_o)(R_1+R_2)}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left\{\frac{{R_1}^2+R_1R_3+R_1R_o-R_3R_o}{(R_1+R_o)(R_1+R_3)}\right\}^2}=\frac{2\sqrt{R_1R_3R_o(R_1+R_3+R_o)}}{(R_1+R_o)(R_1+R_3)}$$

です。すると、$C=\alpha+\beta$なので、

$$\cos C=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\Rightarrow\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos C=0$$

ですから、これに$\cos C$、$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\sin\alpha$、$\sin\beta$を代入すると、以下の関係式が導かれます（導出過程は汚いので、最終ページに記載します）。

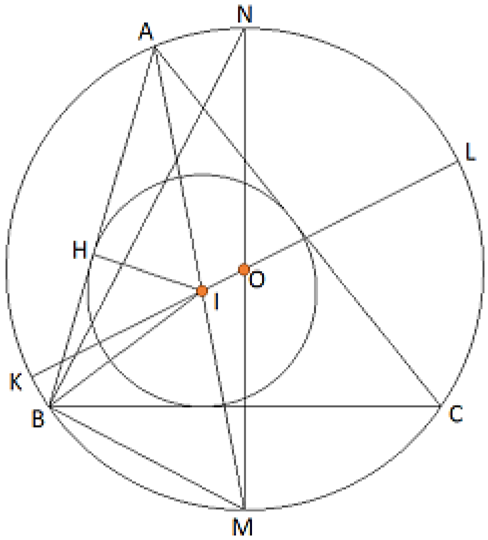
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_o}\right)^2=2\left(\frac{1}{{R_1}^2}+\frac{1}{{R_2}^2}+\frac{1}{{R_3}^2}+\frac{1}{{R_o}^2}\right)$$

上式に問題文の数値$R_1=69$、$R_2=46$、$R_3=23$を代入すると、

$$\left(\frac{1}{69}+\frac{1}{46}+\frac{1}{23}+\frac{1}{R_o}\right)^2=2\left(\frac{1}{69^2}+\frac{1}{46^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{{R_o}^2}\right)\Rightarrow R_o=6,-138(\text{不適})$$

となります。よって、小円の円径は6 寸です。

問題2

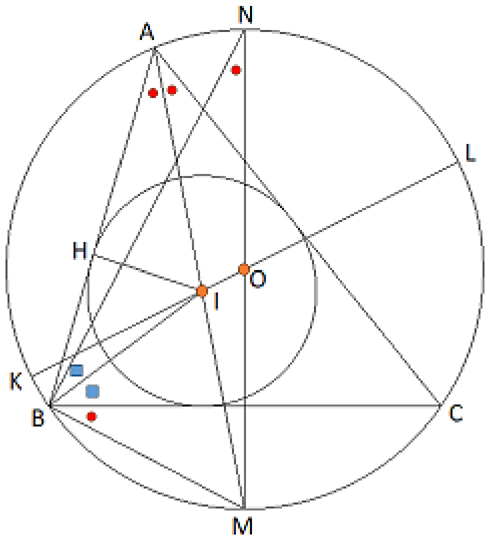


オイラー・チャップル定理によると、三角形の外接円の半径R、内接円の半径r、外心と内心の距離dの間には、以下の関係があるそうです。

$d^2 = R^2 - 2Rr$

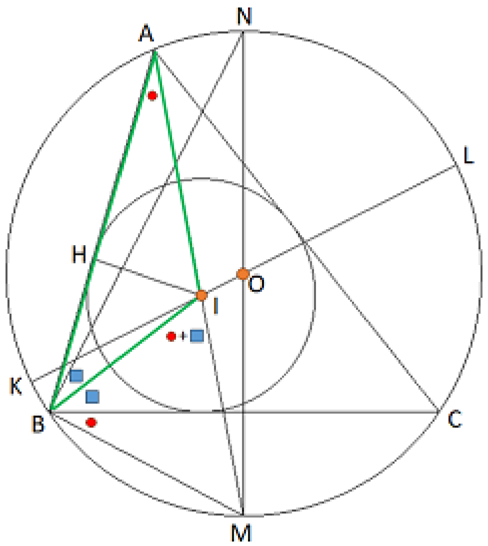
まず、これを証明します。

左図の通り⊿ABCの外心をO、内心をIとし、IからABに垂直に下した点をH、弧BCの中点をM、直線IOと外接円との交点をK、L、直線OMと外接円との交点をNとします。



∠BAMは弧BMの円周角ですが、これと等しい角に赤色の丸を付けます。

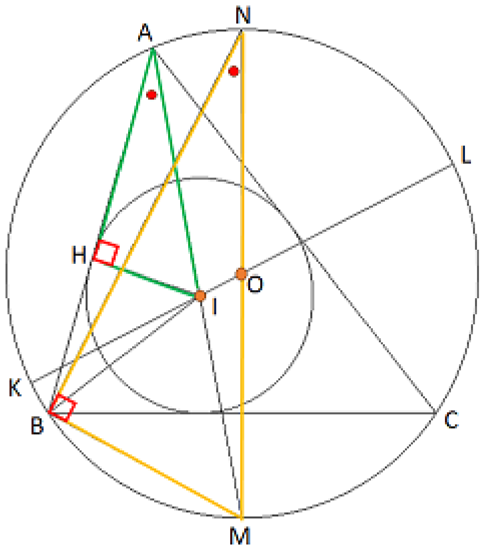
また、IBは∠Bを二等分するので、青色の四角を2つ付けておきます。



すると、緑色の⊿ABIの外角∠BIMは∠HAI＋∠HBIなので、⊿BIMは二等辺三角形です。ゆえに、

$MB = MI \cdots ①$

です。



また、$\angle AHI = \angle NBM = 90°$なので、緑色の$\triangle AHI$と黄色の$\triangle NBM$は相似となり、

$MN : IA = MB : IH$

$\Rightarrow IA \cdot MB = MN \cdot IH = 2Rr$

です。ここで、前ページの①より

$2R = IA \cdot MB = IA \cdot IM$

です。さらに、方べきの定理より、

$2R = IA \cdot IM = IK \cdot IL = (OK - OI)(OL + OI)$

$= (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$

よって、

$d^2 = R^2 - 2Rr$

です。

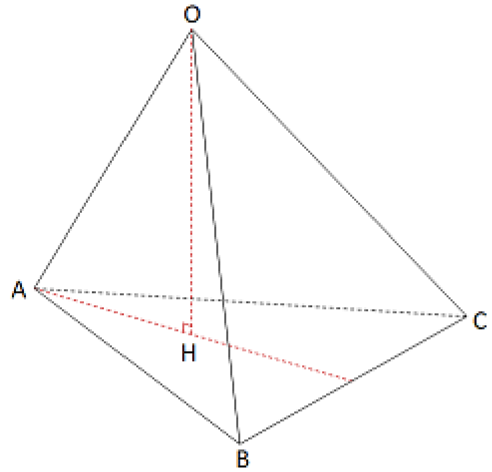
この関係式に、問題文の数値$R = 9$、$r = 4$を代入すると、

$d^2 = 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \Rightarrow d = 3$

となります。よって、甲円と乙円の中心間の距離は3 寸です。

問題3

(1)



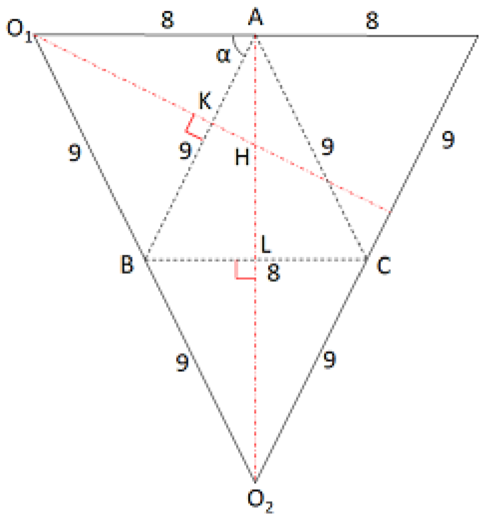
左図のように頂点Oから⊿ABCに下した垂直に下した点をとHします。⊿ABCの面積をSとすると、四面体OABCの体積Vは、

$$V=\frac{1}{3}S\sqrt{OA^2-AH^2}\cdots ①$$

です。Sはヘロンの公式を使うと、

$$S=\frac{\sqrt{(9+8+9)(9+9-8)(9+8-9)(8+9-9)}}{4}$$
$$=4\sqrt{65}$$

です。



AHは展開図で考えます。O_1からABに垂直に下した点をK、O_2からBCに垂直に下した点をLとすると、展開図を組み立てたときに、O_1とO_2はHの頭上で合わさります。

$\angle O_1AB=\alpha$として、⊿O_1ABに余弦定理を適用すると、

$$\cos\alpha=\frac{O_1A^2+AB^2-O_1B^2}{2O_1A\cdot AB}$$

なので、

$$AK=O_1A\cos\alpha=\frac{O_1A^2+AB^2-O_1B^2}{2AB}$$

です。

⊿AHKと⊿ABLは相似なので、

$$AK:AH=AL:AB\Rightarrow AH=\frac{AK\cdot AB}{AL}=\frac{\frac{O_1A^2+AB^2-O_1B^2}{2AB}\cdot AB}{\sqrt{AB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}}=\frac{O_1A^2+AB^2-O_1B^2}{2\sqrt{AB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}}$$

です。上式に$O_1A=8$、$O_1B=9$、$AB=9$、$BC=8$を代入すると、

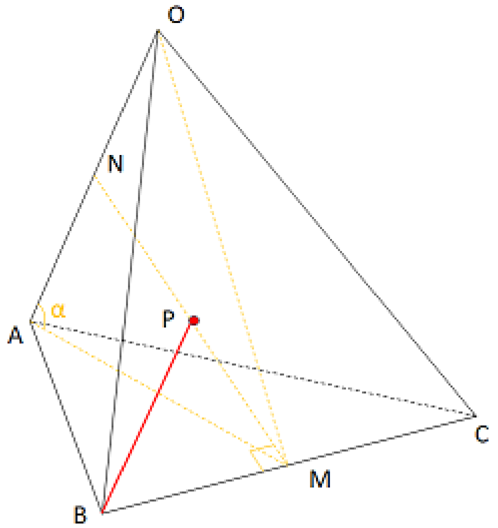
$$AH=\frac{8^2+9^2-9^2}{2\sqrt{9^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2}}=\frac{32}{\sqrt{65}}$$

です。①式に$S=4\sqrt{65}$、$OA=8$、$AH=\frac{32}{\sqrt{65}}$を代入すると、

$$V=\frac{1}{3}S\sqrt{OA^2-AH^2}=\frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{65}\cdot\sqrt{8^2-\left(\frac{32}{\sqrt{65}}\right)^2}=\frac{224}{3}$$

です。以上より、四面体OABCの体積は$\frac{224}{3}$です。

(2)



図形の対称性に着目します。$OB = OC = AB = AC$なので、OAとBCはねじれの位置関係です。OA、BCの中点をそれぞれN、Mとすると、MNはOA、BCに垂直ですが、その中点をPとすると、$AP = BP = CP = OP$なので、Pは外接球の中心であることがわかります。

次に、$OB = OC = AB = AC = a$、$OA = BC = b$、$OM = AM = c$、$MN = d$、$\angle OAM = \alpha$として、⊿OAMに余弦定理を適用すると、

$$\cos\alpha = \frac{OA^2 + AM^2 - OM^2}{2OA \cdot AM} = \frac{b^2 + c^2 - c^2}{2bc} = \frac{b}{2c}$$

です。

さらに、⊿NAMにも余弦定理を適用すると、

$$NM = \sqrt{AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM\cos\alpha} \Rightarrow d = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot c \cdot \frac{b}{2c}} = \frac{\sqrt{4c^2 - b^2}}{2}$$

となり、

$$BP = \sqrt{BM^2 + MP^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{\sqrt{4c^2 - b^2}}{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3b^2 + 4c^2}}{4}$$

です。ここで、

$$c = AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

なので、

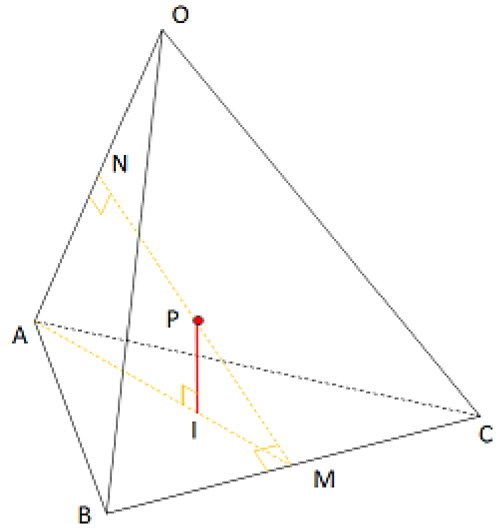
$$BP = \frac{\sqrt{3b^2 + 4c^2}}{4} = \frac{\sqrt{3b^2 + 4\left(\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}\right)^2}}{4} = \frac{\sqrt{4a^2 + 2b^2}}{4}$$

が得られます。$a = 9$、$b = 8$を代入すると、

$$BP = \frac{\sqrt{4a^2 + 2b^2}}{4} = \frac{\sqrt{4 \cdot 9^2 + 2 \cdot 8^2}}{4} = \frac{\sqrt{113}}{2}$$

となります。以上より、四面体OABCの外接球の半径は$\frac{\sqrt{113}}{2}$です。

(3)



この問題も図形の対称性に着目します。内接球と外接球の中心が一致していると思われるので、Pから⊿ABCに垂直に下した点をIとすると、PIが内接球の半径です。

すると、⊿AMNと⊿PMIは相似なので、

$$\mathrm{AM:AN=PM:PI} \Rightarrow \mathrm{PI}=\frac{\mathrm{AN\cdot PM}}{\mathrm{AM}}=\frac{\frac{\mathrm{OA}}{2}\cdot\frac{\mathrm{MN}}{2}}{\mathrm{AM}}$$

です。前ページの結果を利用すると、

$$\mathrm{c}=\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{4\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}}{2}$$

です。

さらに、

$$\mathrm{NM}=\frac{\sqrt{4\mathrm{c}^2-\mathrm{b}^2}}{2}=\frac{\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{4\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}}{2}\right)^2-\mathrm{b}^2}}{2}=\frac{\sqrt{4\mathrm{a}^2-2\mathrm{b}^2}}{2}$$

そして、

$$\mathrm{PI}=\frac{\frac{\mathrm{OA}}{2}\cdot\frac{\mathrm{MN}}{2}}{\mathrm{AM}}=\frac{\frac{\mathrm{b}}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{4\mathrm{a}^2-2\mathrm{b}^2}}{2}}{2}}{\frac{\sqrt{4\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}}{2}}=\frac{\mathrm{b}\sqrt{4\mathrm{a}^2-2\mathrm{b}^2}\sqrt{4\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}}{4(2\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{b}+2\mathrm{a})}$$

が得られます。$\mathrm{a}=9$、$\mathrm{b}=8$を代入すると、

$$\mathrm{PI}=\frac{\mathrm{b}\sqrt{4\mathrm{a}^2-2\mathrm{b}^2}\sqrt{4\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}}{4(2\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{b}+2\mathrm{a})}=\frac{\mathrm{b}\sqrt{4\cdot9^2-2\cdot8^2}\sqrt{4\cdot9^2-8^2}}{4(2\cdot9-8)(2\cdot9+8)}=\frac{14}{\sqrt{65}}$$

となります。以上より、四面体OABCの内接球の半径は$\frac{14}{\sqrt{65}}$です。

問題4

(1) $GD = a$ 、$GE = b$ 、$GF = c$ 、$\varDelta DGE$ の面積 $= S_1$ 、$\varDelta DGF$ の面積 $= S_2$ 、$\varDelta EGF$ の面積 $= S_3$ 、$\varDelta DEF$ の面積 $= S_4$、四面体 DEFG の表面積 $= S$とします。S_1～S_3は普通に求めて、

$$S_1 = \frac{ab}{2}、S_2 = \frac{ac}{2}、S_3 = \frac{bc}{2}$$

です。⊿DEFを各座標平面に投影すると、⊿DGE、⊿DGF、⊿EGFになりますから、補足に記載した関係を用いると、

$$S_4{}^2 = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4}$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2}$$

なので、

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2}$$

$$= \frac{ab + ac + bc + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2}$$

です。上式に$a = 4$、$b = 7$、$c = 3$を代入すると、

$$S = \frac{ab + ac + bc + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2} = \frac{4 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + \sqrt{4^2 7^2 + 4^2 3^2 + 7^2 3^2}}{2} = 49$$

です。以上より、四面体 DEFG の表面積 $= 49$です。

補足　直交系$e_x = (1,0,0)$、$e_y = (0,1,0)$、$e_z = (0,0,1)$のとき、$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e_x} + a_2\mathbf{e_y} + a_3\mathbf{e_z}$、$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e_x} + b_2\mathbf{e_y} + b_3\mathbf{e_z}$とすると、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e_x} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e_y} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e_z}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2$$

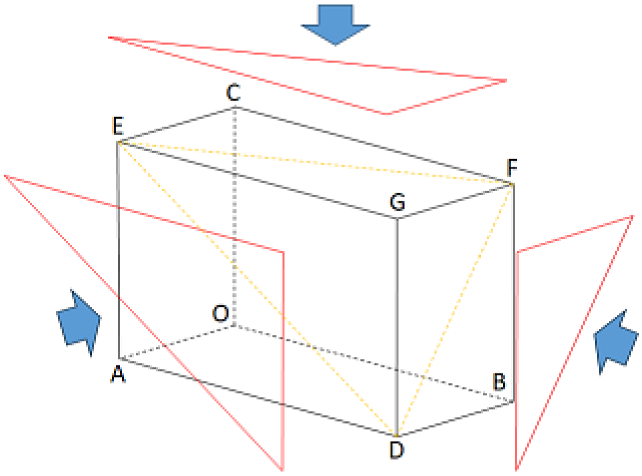
$$\Rightarrow \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{4} = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2}{4} + \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2}{4} + \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2}{4}$$

です。ここで、$A(a_1, a_2, a_3)$、$B(b_1, b_2, b_3)$、$O(0,0,0)$とすると、左辺は⊿ABCの面積の平方S^2、右辺の第 1 項目はyz 平面に投影した面積の平方$S_x{}^2$、第 2 項目はzx 平面に投影した面積の平方$S_y{}^2$、第 3 項目はxy 平面に投影した面積の平方$S_z{}^2$です。よって、

$$S^2 = S_x{}^2 + S_y{}^2 + S_z{}^2$$

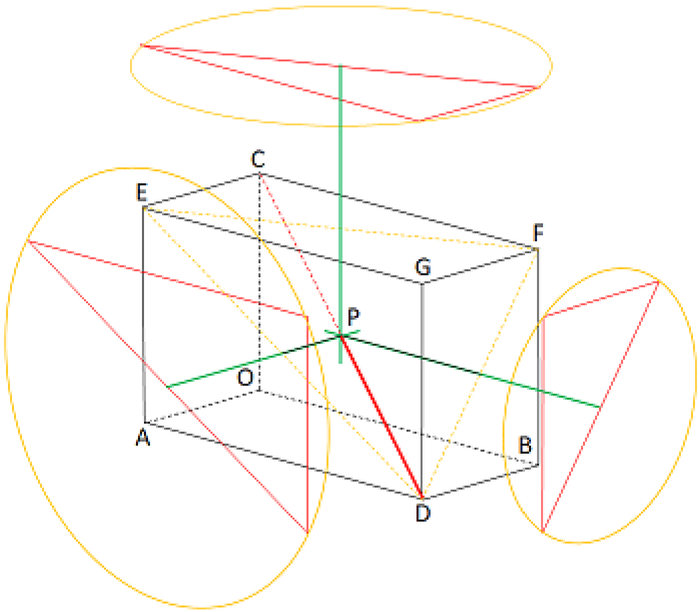
です。

(2)



四面体 DEFGの側面が各座標平面と平行になっていることに着目します。

そして、左図のように、矢印方向から見れば、DEFGを赤の直角三角形で捉えることができます。



各投影面からみると、外接球は直角三角形の外接円に見えますが、その中心は三角形の斜辺の中点です。
その中点からDEFGの側面に垂直な直線を引くと、Pで交わります。これが外接球の中心で、$DP = EP = FP$がその半径となります。よって、

$$DP = \frac{DC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

です。上式に$a = 4$、$b = 7$、$c = 3$を代入すると、

$$DP = \frac{\sqrt{4^2 + 7^2 + 3^2}}{2} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

以上より、四面体 DEFG の外接球の半径 $= \frac{\sqrt{74}}{2}$です。

(3) 作図での解法を試みましたが、できませんでした。月並みですが、次のようにやりました。
内接球の中心をI、半径をr、四面体 DEFGの体積V、四面体 IGEDの体積$\mathrm{V_1}$、四面体 IGDFの体積$\mathrm{V_2}$、四面体 IGFEの体積$\mathrm{V_3}$、四面体 IDEFの体積$\mathrm{V_4}$、四面体 DEFG の表面積 $= \mathrm{S}$、⊿GED の面積 $= \mathrm{S_1}$、⊿GDF の面積 $= \mathrm{S_2}$、⊿GFE の面積 $= \mathrm{S_3}$、⊿DEF の面積 $= \mathrm{S_4}$とすると、

$$\mathrm{V} = \mathrm{V_1} + \mathrm{V_2} + \mathrm{V_3} + \mathrm{V_4} = \frac{\mathrm{S_1 r}}{3} + \frac{\mathrm{S_2 r}}{3} + \frac{\mathrm{S_3 r}}{3} + \frac{\mathrm{S_4 r}}{3} = \frac{\mathrm{Sr}}{3}$$

です。$\mathrm{V} = \frac{3\times4\times7}{6} = 14$、$\mathrm{S} = 49$なので、

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{Sr}}{3} \Rightarrow 14 = \frac{49\mathrm{r}}{3} \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{6}{7}$$

以上より、四面体 DEFG の内接球の半径 $= \frac{6}{7}$です。

追加問題1 2024/03/20 追記

与式の右辺に 3 乗の因数分解公式を適用できるように変形します。

$$\text{右辺} = (m^3+3m^2+3m+1)-(m^2+102m-2023)$$
$$= (m+1)^3-(m-17)(m+119)$$

すると、与式は次のように変形できます。

$$(m+1)^3-n^3=(m-17)(m+119)$$
$$\Rightarrow (m-n+1)(m^2+nm+2m+n^2+n+1)=(m-17)(m+119)$$

両辺ともに積の形に変形できたので、次の4組の連立方程式が解を持っている可能性があります。

$$\begin{cases} m-n+1=(m-17)(m+119) \\ m^2+nm+2m+n^2+n+1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n+1=m-17 \\ m^2+nm+2m+n^2+n+1=m+119 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n+1=m+119 \\ m^2+nm+2m+n^2+n+1=m-17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n+1=1 \\ m^2+nm+2m+n^2+n+1=(m-17)(m+119) \end{cases}$$

ところが、いずれも整数解を持たないので、右辺 $=0 \Rightarrow m=17,-119$のケースが考えられます。この場合、

$$m^2+nm+2m+n^2+n+1=n^2+18n+324=(n+9)^2+243>0$$
$$m^2+nm+2m+n^2+n+1=n^2-118n+13924=(n-59)^2+10443>0$$

となるので、

$$m-n+1=0 \Rightarrow n=18,118$$

です。以上より、求める整数は$(m.n)=(17,18),(-119,-118)$です。

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos C=0\Rightarrow\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_o}\right)^2=2\left(\frac{1}{R_1{}^2}+\frac{1}{R_2{}^2}+\frac{1}{R_3{}^2}+\frac{1}{R_o{}^2}\right)$の計算過程

$$\Rightarrow\frac{R_1{}^2+R_1R_2+R_1R_o-R_2R_o}{(R_1+R_o)(R_1+R_2)}\cdot\frac{R_1{}^2+R_1R_3+R_1R_o-R_3R_o}{(R_1+R_o)(R_1+R_3)}-\frac{2\sqrt{R_1R_2R_o(R_1+R_2+R_o)}}{(R_1+R_o)(R_1+R_2)}\cdot\frac{2\sqrt{R_1R_3R_o(R_1+R_3+R_o)}}{(R_1+R_o)(R_1+R_3)}-\frac{R_1{}^2+R_1R_2+R_1R_3-R_2R_3}{(R_1+R_3)(R_1+R_2)}=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(R_1+R_3)(R_1+R_2)(R_1+R_o)^2}\left\{\left(R_1{}^2+R_1R_2+R_1R_o-R_2R_o\right)\left(R_1{}^2+R_1R_3+R_1R_o-R_3R_o\right)-2\sqrt{R_1R_2R_o(R_1+R_2+R_o)}2\sqrt{R_1R_3R_o(R_1+R_3+R_o)}-(R_1+R_o)^2R_1{}^2+R_1R_2+R_1R_3-R_2R_3\right\}=0$$

$$\Rightarrow\left(R_1{}^2+R_1R_2+R_1R_o-R_2R_o\right)\left(R_1{}^2+R_1R_3+R_1R_o-R_3R_o\right)-2\sqrt{R_1R_2R_o(R_1+R_2+R_o)}2\sqrt{R_1R_3R_o(R_1+R_3+R_o)}-(R_1+R_o)^2R_1{}^2+R_1R_2+R_1R_3-R_2R_3=0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{R_1R_2R_o(R_1+R_2+R_o)}2\sqrt{R_1R_3R_o(R_1+R_3+R_o)}=\left(R_1{}^2+R_1R_2+R_1R_o-R_2R_o\right)\left(R_1{}^2+R_1R_3+R_1R_o-R_3R_o\right)-(R_1+R_o)^2R_1{}^2+R_1R_2+R_1R_3-R_2R_3$$

左辺^2 − 右辺^{2}とすると、

$$\Rightarrow 4(R_1+R_o)^2\left(R_3{}^2R_2{}^2R_1{}^2+R_o{}^2R_2{}^2R_1{}^2+R_o{}^2R_3{}^2R_1{}^2+R_o{}^2R_3{}^2R_2{}^2-2R_oR_3R_2{}^2R_1{}^2-2R_oR_3{}^2R_2R_1{}^2-2R_o{}^2R_3R_2R_1{}^2-2R_oR_3{}^2R_2{}^2R_1-2R_o{}^2R_3R_2{}^2R_1-2R_o{}^2R_3{}^2R_2R_1\right)=0$$

$$\Rightarrow 4(R_1+R_o)^2R_3{}^2R_2{}^2R_1{}^2R_o{}^2\left\{\frac{1}{R_o{}^2}+\frac{1}{R_3{}^2}+\frac{1}{R_2{}^2}+\frac{1}{R_1{}^2}-\frac{2}{R_oR_3}-\frac{2}{R_oR_2}-\frac{2}{R_3R_2}-\frac{2}{R_oR_1}-\frac{2}{R_3R_1}-\frac{2}{R_2R_1}\right\}=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{R_o{}^2}+\frac{1}{R_3{}^2}+\frac{1}{R_2{}^2}+\frac{1}{R_1{}^2}-\frac{2}{R_oR_3}-\frac{2}{R_oR_2}-\frac{2}{R_3R_2}-\frac{2}{R_oR_1}-\frac{2}{R_3R_1}-\frac{2}{R_2R_1}=0$$

$$\Rightarrow-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_o}\right)^2+2\left(\frac{1}{R_1{}^2}+\frac{1}{R_2{}^2}+\frac{1}{R_3{}^2}+\frac{1}{R_o{}^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_o}\right)^2=2\left(\frac{1}{R_1{}^2}+\frac{1}{R_2{}^2}+\frac{1}{R_3{}^2}+\frac{1}{R_o{}^2}\right)$$