第438回　よふかしのつらいおじさん

問題1

円甲、乙、丙、小の直径をそれぞれａ、ｂ、ｃ、ｄとおくと、どの円も他の円に外接しているので、デカルトの円定理より、

$$\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}+\frac{2}{d}\right)^2=2\left(\left(\frac{2}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2+\left(\frac{2}{c}\right)^2+\left(\frac{2}{d}\right)^2\right)$$

の関係があります。

ａ＝69、ｂ＝46、ｃ＝23なので、

$$\left(\frac{2}{69}+\frac{2}{46}+\frac{2}{23}+\frac{2}{d}\right)^2=2\left(\left(\frac{2}{69}\right)^2+\left(\frac{2}{46}\right)^2+\left(\frac{2}{23}\right)^2+\left(\frac{2}{d}\right)^2\right)$$

$$\to\left(\frac{22}{138}+\frac{2}{d}\right)^2=2\left(\frac{16+36+144}{138^2}+\left(\frac{2}{d}\right)^2\right)\to\left(\frac{11}{69}+\frac{2}{d}\right)^2=2\left(\frac{196}{138^2}+\left(\frac{2}{d}\right)^2\right)$$

$$\to\left(\frac{11}{69}+\frac{2}{d}\right)^2=2\left(\frac{49}{69^2}+\left(\frac{2}{d}\right)^2\right)\to\left(\frac{11}{69}\right)^2+2\times\frac{11}{69}\times\left(\frac{2}{d}\right)+\left(\frac{2}{d}\right)^2=2\times\frac{49}{69^2}+2\left(\frac{2}{d}\right)^2$$

$$\to\left(\frac{2}{d}\right)^2-2\times\frac{11}{69}\times\left(\frac{2}{d}\right)+2\times\frac{49}{69^2}-\left(\frac{11}{69}\right)^2=0\to\left(\frac{2}{d}\right)^2-2\times\frac{11}{69}\times\left(\frac{2}{d}\right)-\frac{23}{69^2}=0$$

$$\to\left(\frac{2}{d}\right)=\frac{11}{69}\pm\sqrt{\left(\frac{11}{69}\right)^2+\frac{23}{69^2}}=\frac{11}{69}\pm\sqrt{\frac{144}{69^2}}=\frac{11}{69}\pm\frac{12}{69}=\frac{23}{69},-\frac{1}{69}=\frac{1}{3},-\frac{1}{69}$$

2/d は正なので、

$$\frac{2}{d}=\frac{1}{3}\to d=6$$

よって、円小の直径は、6寸。

問題2

三角形に内接する円甲の半径をｒ、外接する円乙の半径をＲとすると、内接円と外接円の中心の距離ｄは、オイラー・チャップル定理の定理より、

$$d^2=R(R-2r)$$

の関係があります。

ｒ＝４，Ｒ＝９なので、

$$d^2=9(9-2\times4)=9\to d^2=9\to d=3\,(>0)$$

よって、中心間の距離は、3寸。

問題 3

（1）　四面体 OABC の体積を、底面が△ABC として考えます。

辺 BC の中点を M とすると、∠AMC が直角なので、AM の長さは、

$$AM=\sqrt{AC^2-CM^2}=\sqrt{9^2-4^2}=\sqrt{65}$$

よって△ABC の面積は、

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AM\times BC=\frac{1}{2}\times\sqrt{65}\times 8=4\sqrt{65}$$

点 O から AM に垂線 OH を下ろします。

△OAM の面積を 2 種類の方法で調べ比較して、OH の長さを求めます。

まず、AM を底辺とし、高さを OH とすると、

$$S_{\Delta OAM}=\frac{1}{2}AM\times OH=\frac{\sqrt{65}}{2}OH$$

次に、ヘロンの公式で考えます。

そのとき、AM＝MO です。

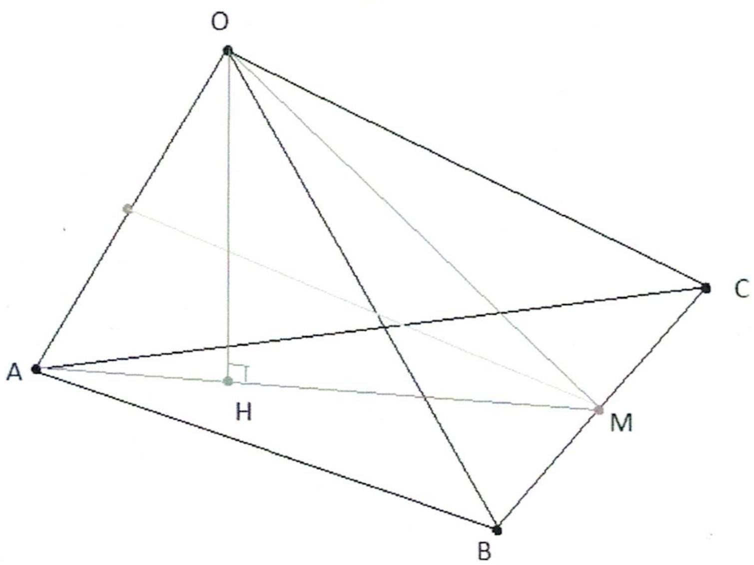
$$S_{\Delta OAM}=\sqrt{\frac{OA+AM+MO}{2}\times\frac{-OA+AM+MO}{2}\times\frac{OA-AM+MO}{2}\times\frac{OA+AM-MO}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{8+\sqrt{65}+\sqrt{65}}{2}\times\frac{-8+\sqrt{65}+\sqrt{65}}{2}\times\frac{8-\sqrt{65}+\sqrt{65}}{2}\times\frac{8+\sqrt{65}-\sqrt{65}}{2}}$$

$$=2\sqrt{\left(2\sqrt{65}+8\right)\left(2\sqrt{65}-8\right)}=2\times\sqrt{(4\times 65-64)}=2\times 14=28$$

よって、比較して、

$$\frac{\sqrt{65}}{2}OH=28\quad\rightarrow\quad OH=\frac{56}{\sqrt{65}}=\frac{56\sqrt{65}}{65}$$



よって、四面体 OABC の体積 V は、

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\times OH=\frac{1}{3}\times 4\sqrt{65}\times\frac{56\sqrt{65}}{65}=\frac{224}{3}$$

（2）　△OAH に注目して、AH の長さを求めます。

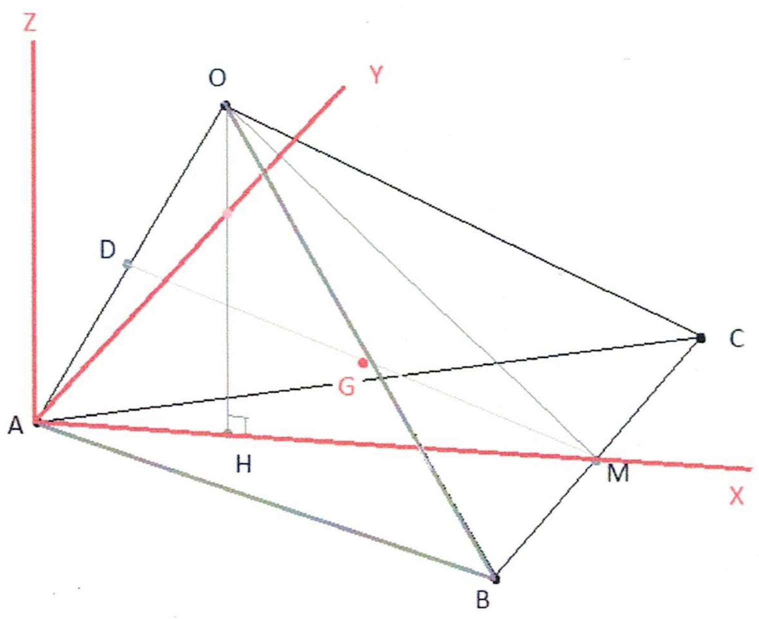
$$AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{8^2-\left(\frac{56\sqrt{65}}{65}\right)^2}=\sqrt{64-\frac{56^2}{65}}=\frac{32}{\sqrt{65}}=\frac{32\sqrt{65}}{65}$$

図のように、AM を x 軸上、△OAM に垂直に y 軸、A を通るように z 軸をとります。
△ＯＡＭは、XZ 平面上です。
辺ＯＡの中点をＤとします。
線分 DM の中点を G とします。
すると、各点の座標は、

$$O\left(\frac{32\sqrt{65}}{65},0,\frac{56\sqrt{65}}{65}\right)\quad A(0,0,0)\quad M\left(\sqrt{65},0,0\right)\quad D\left(\frac{16\sqrt{65}}{65},0,\frac{28\sqrt{65}}{65}\right)$$

すると、G は線分 DM の中点なので、

$$G\left(\frac{\frac{16\sqrt{65}}{65}+\sqrt{65}}{2},\frac{0+0}{2},\frac{\frac{28\sqrt{65}}{65}+0}{2}\right)=G\left(\frac{81\sqrt{65}}{130},0,\frac{14\sqrt{65}}{65}\right)$$



四面体 OABC は点 G に関して点対称の立体なので、外接球や内接球の中心が G です。
よって、外接球の半径 R は、

$$R=GA=\sqrt{\left(\frac{81\sqrt{65}}{130}\right)^2+0^2+\left(\frac{14\sqrt{65}}{65}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{65}\sqrt{\left(\frac{81}{2}\right)^2+14^2}=\frac{\sqrt{113}}{2}$$

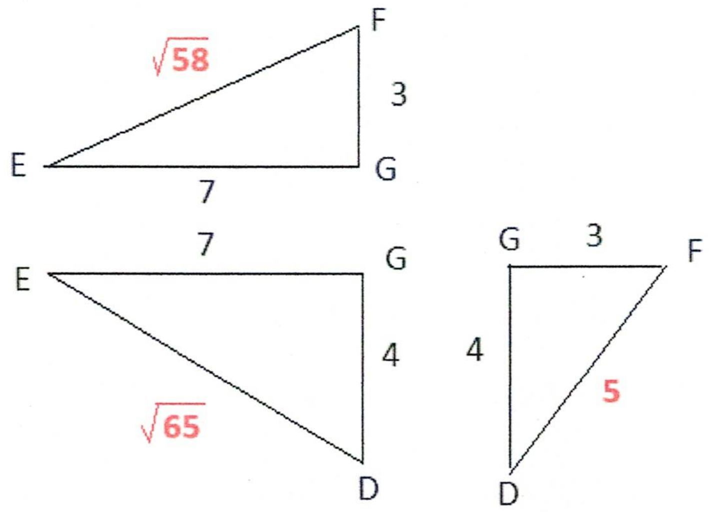
（3）　四面体の内接球の半径 r は、G の y 座標になるので、

$$r=\frac{14\sqrt{65}}{65}$$

問題 4

（1）四面体 DEFG の表面積 S は、４個の三角形の和になります。

$S = S_{EDG} + S_{GDF} + S_{EGF} + S_{EDF}$



$$S_{EDG} = \frac{1}{2} DG \times GE = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14$$

$$S_{GDF} = \frac{1}{2} DG \times GF = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

$$S_{EGF} = \frac{1}{2} EG \times GF = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 = \frac{21}{2}$$

$$S_{EDF} = \sqrt{\frac{ED + DF + FE}{2} \times \frac{-ED + DF + FE}{2} \times \frac{ED - DF + FE}{2} \times \frac{ED + DF - FE}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{65} + 5 + \sqrt{58}}{2} \times \frac{-\sqrt{65} + 5 + \sqrt{58}}{2} \times \frac{\sqrt{65} - 5 + \sqrt{58}}{2} \times \frac{\sqrt{65} + 5 - \sqrt{58}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(5 + \sqrt{58}\right)^2 - 65}{4} \times \frac{65 - \left(5 - \sqrt{58}\right)^2}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(25 + 10\sqrt{58} + 58 - 65\right)\left(65 - 25 + 10\sqrt{58} - 58\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left(10\sqrt{58} + 18\right)\left(10\sqrt{58} - 18\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{(5800 - 18^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{5476} = \frac{1}{4}\sqrt{(2 \times 37)^2} = \frac{37}{2}$$

よって、

$$S = S_{EDG} + S_{GDF} + S_{EGF} + S_{EDF} = 14 + 6 + \frac{21}{2} + \frac{37}{2} = 49$$

●別解

直方体の 3 辺が、3＋4＝7 という関係があるので、次の解き方ができます。

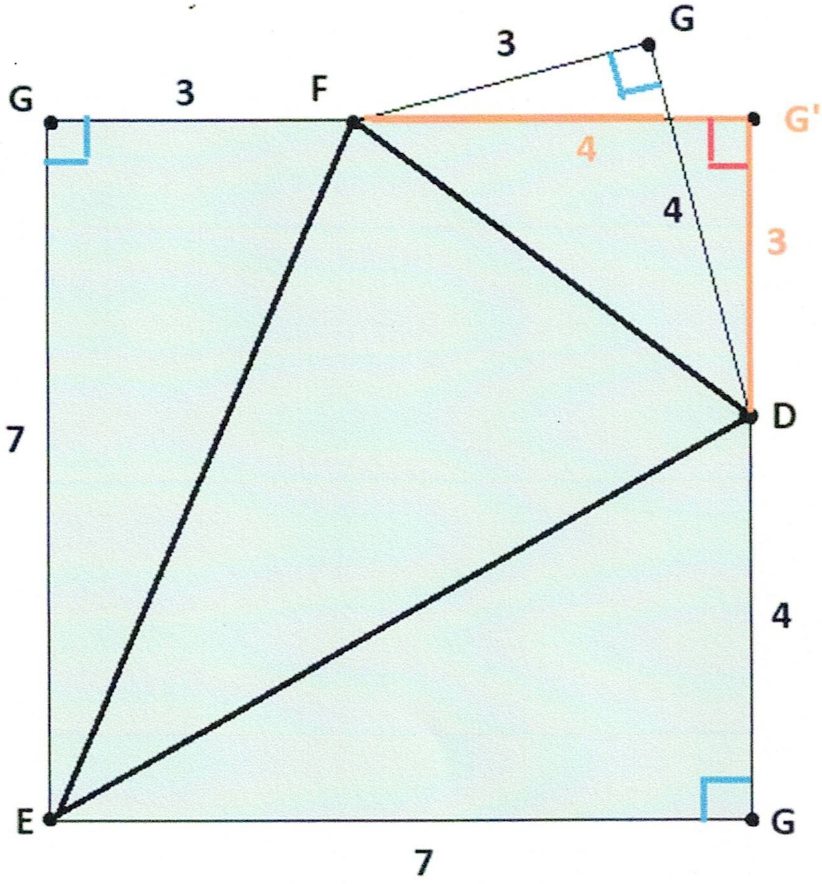
△DEF の面に、四面体を展開します。

すると、図の黒の図形ができます。

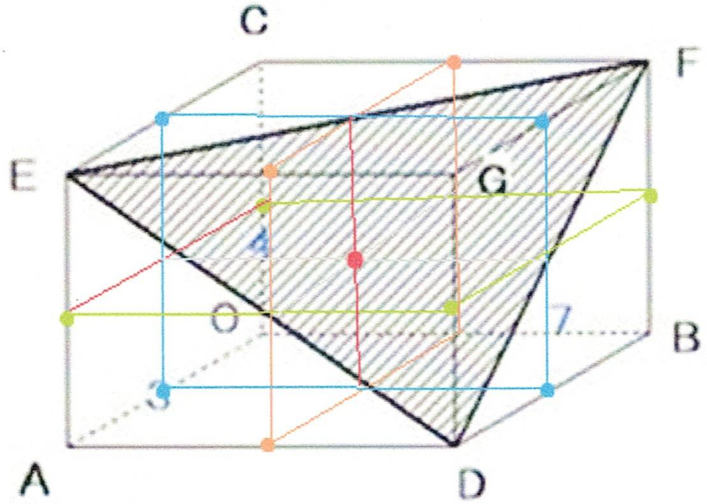
右上の直角三角形 DFG を合同な直角三角形 DFG‘で置き換えます。

すると、1 辺の長さが 7 の正方形ができます。

よって、表面積は、7×7＝49 となります。



（2）頂点 E、G から等距離にある点は、EG の中点を通り EG に垂直な平面です。（橙色）
頂点 G、D から等距離にある点は、GD の中点を通り GD に垂直な平面です。（黄緑色）
頂点 G、F から等距離にある点は、GF の中点を通り GF に垂直な平面です。（青色）
これらの 3 平面が交わる点が、四面体 DEFG の外心になります。（赤点）



四面体 DEFG の外接球の半径 R は、与えられた直方体の各辺の半分の大きさを各辺とする直方体の対角線の長さです。

与えられた直方体の対角線のＯＧが、

$OG = \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{74}$
なので、$R = \frac{\sqrt{74}}{2}$

（3）　四面体ＧＤＥＦの体積Ｖは、手前の△ＧＤＥを底面とし、高さをＧＦとすると、
$V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times GD \times GE\right) \times GF = \frac{1}{6} \times 4 \times 7 \times 3 = 14$

一方、内接球の半径をｒとすると、（1）で表面積が 49 なので、四面体ＧＤＥＦの体積Ｖは、
$V = \frac{1}{3} r(S_{EDG} + S_{GDF} + S_{EGF} + S_{EDF}) = \frac{1}{3} r \times 49 = 14$
より、
$r = \frac{6}{7}$

追加問題
問題 1
$n^3 = m^3 + 2m^2 - 99m + 2024 \quad \rightarrow \quad n^3 - m^3 = 2m^2 - 99m + 2024$
$\rightarrow \quad (n - m)(n^2 + nm + m^2) = 2m^2 - 99m + 2024 \quad \cdots \quad (ア)$

ここで、$d = n - m$ （$n = m + d$）とおきます。
（ア）の左辺は
$(n - m)(n^2 + nm + m^2) = d((m + d)^2 + (m + d)m + m^2)$
$= d(m^2 + 2dm + d^2 + m^2 + dm + m^2) = d(3m^2 + 3dm + d^2)$
これが（ア）の右辺と等しいので、
$d(3m^2 + 3dm + d^2) = 2m^2 - 99m + 2024$
$\rightarrow \quad (3d - 2)m^2 + (3d^2 + 99)m + (d^3 - 2024) = 0 \quad \cdots \quad (イ)$

方程式（イ）の 2 個の解をα、βとおくと、
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{3d^2 + 99}{3d - 2} \\ \alpha\beta = \dfrac{d^3 - 2024}{3d - 2} \end{cases}$$

（イ）が整数の解をもつとすると、その和や積が整数であることが必要条件です。
分母が 1 であるとすると、ｄ＝1 です。
このとき、方程式（イ）は、
$(3d - 2)m^2 + (3d^2 + 99)m + (d^3 - 2024) = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + 102m - 2023 = 0$

$\rightarrow \quad m = -51 \pm \sqrt{51^2 + 2023} = -51 \pm \sqrt{4624} = -51 \pm 68 = 17, -119$

ｍが整数になりました。
よって、
$(n, m) = (18,17), (-118, -119)$

問題２
※ 論理的な記述ではなく、調べた結果を書きます。

$$\sum_{k=1}^{2024}(-x-x^2-\cdots-x^n)^{k-1}$$

◆ｎ＝1 のとき、2023 乗の係数は、－１です。

$$\sum_{k=1}^{2024}(-x)^{k-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{2023}$$

◆ｎ＝2 のとき、ｋの値ごとに係数を並べると、次のようになります。
符号は、行ごとに正負となります。
数字はパスカルの三角形と同じで、両端は 1、中の数は上の２数の和です。
斜めに同類項が並ぶので、例えば 7 乗の係数は、－1＋6－10＋4＝－1 です。

k=1	1									1
k=2	-1	-1								x^1 x^2
k=3	1	2	1							x^2 x^3 x^4
k=4	-1	-3	-3	-1						x^3 x^4 x^5 x^6
k=5	1	4	6	4	1					x^4 x^5 x^6 x^7 x^8
k=6	-1	-5	-10	-10	-5	-1				x^5 x^6 x^7 x^8 x^9 x^10
k=7	1	6	15	20	15	6	1			x^6 x^7 x^8 x^9 x^10 x^11 x^12
k=8	-1	-7	-21	-35	-35	-21	-7	-1		x^7 x^8 x^9 x^10 x^11 x^12 x^13 x^14
k=9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	x^8 x^9 x^10 x^11 x^12 x^13 x^14 x^15 x^16
・・・	・・・									・・・

x^p の係数は、ｍを正の整数として、
　ｐ＝3(ｍ－1)のとき、1
　ｐ＝3(ｍ－1)＋1 のとき、－1
　ｐ＝3(ｍ－1)＋2 のとき、0

2023＝3(675－1)＋1 なので、－1

◆ｎ＝3 のとき、ｋの値ごとに係数を並べると、次のようになります。
符号は、行ごとに正負となります。
数字は、両端は 1、左右から２番目は上の２数の和、中の数は上３数の和です。
斜めに同類項が並ぶので、例えば 6 乗の係数は、1－5＋10－7＋1＝0 です。

k=1	1													1
k=2	-1	-1	-1											x^1 x^2 x^3
k=3	1	2	3	2	1									x^2 x^3 x^4 x^5 x^6
k=4	-1	-3	-6	-7	-6	-3	-1							x^3 x^4 x^5 x^6 x^7 x^8 x^9
k=5	1	4	10	16	19	16	10	4	1					x^4 x^5 x^6 x^7 x^8 x^9 x^10 x^11 x^12
k=6	-1	-5	-15	-30	-45	-51	-45	-30	-15	-5	-1			x^5 x^6 x^7 x^8 x^9 x^10 x^11 x^12 x^13 x^14 x^15
k=7	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1	x^6 x^7 x^8 x^9 x^10 x^11 x^12 x^13 x^14 x^15 x^16 x^17 x^18
…	…													…

x^p の係数は、mを正の整数として、

p＝4(m－1)のとき、1

p＝4(m－1)＋1のとき、－1

p＝4(m－1)＋2のとき、0

p＝4(m－1)＋3のとき、0

2023＝4(506－1)＋3なので、0

◆同様にして、

・n＝4のとき、x^p の係数は、mを正の整数として、

p＝5(m－1)のとき、1

p＝5(m－1)＋1のとき、－1

p＝5(m－1)＋2のとき、0

p＝5(m－1)＋3のとき、0

p＝5(m－1)＋4のとき、0

2023＝5(405－1)＋3なので、0

・n＝5のとき、x^p の係数は、mを正の整数として、

p＝6(m－1)のとき、1

p＝6(m－1)＋1のとき、－1

p＝6(m－1)＋2のとき、0

p＝6(m－1)＋3のとき、0

p＝6(m－1)＋4のとき、0

p＝6(m－1)＋5のとき、0

2023＝6(338－1)＋1なので、－1

・n＝6のとき、x^p の係数は、mを正の整数として、

p＝7(m－1)のとき、1

p＝7(m－1)＋1のとき、－1

p＝7(m－1)＋2のとき、0

p＝7(m－1)＋3のとき、0

p＝7(m－1)＋4のとき、0

p＝7(m－1)＋5のとき、0

p＝7(m－1)＋6のとき、0

2023＝7(290－1)なので、1

よって、n＝6