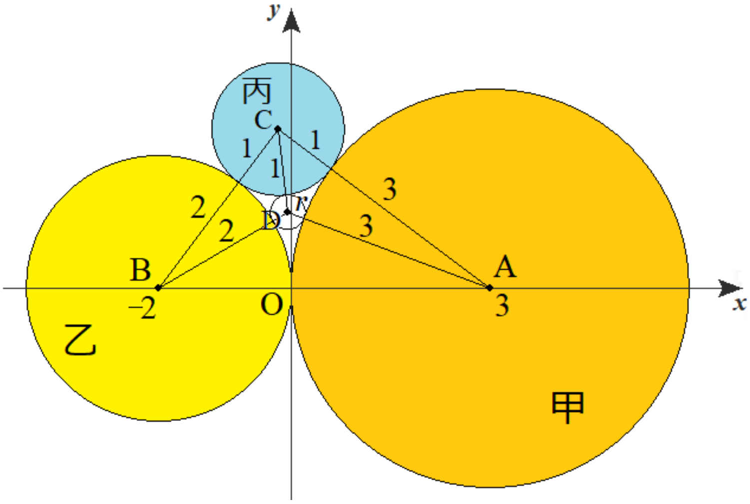
● 問題 438 解答＜三角定規＞

［問題１］

図のように, 座標軸, 座標, 各点を定める。



丙円の中心座標を $C(x,\ y)$ とすると,

$AC=4$ より $(x-3)^2+y^2=4^2$ …①

$BC=3$ より $(x+2)^2+y^2=3^2$ …②

②−①: $(4x+4)-(-6x+9)=9-16$

$\therefore\ 10x=-2\quad \therefore\ x=-\dfrac{1}{5}$ …③

③を②に戻し, $y^2=3^2-\left(\dfrac{9}{5}\right)^2=\left(\dfrac{12}{5}\right)^2$

よって $C\left(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$

小円の中心を改めて $D(x,\ y)$, 半径を r とすると,

$AD=3+r$ より $(x-3)^2+y^2=(3+r)^2$ …④

$BD=2+r$ より $(x+2)^2+y^2=(2+r)^2$ …⑤

$CD=1+r$ より $\left(x+\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{12}{5}\right)^2=(1+r)^2$ …⑥

⑤−④: $(4x+4)-(-6x+9)=4r+4-(6r+9)$, $\therefore\ 10x=-2r\quad \therefore\ x=-\dfrac{r}{5}$ …⑦

⑤−⑥: $(4x+4)-\left(\dfrac{2x}{5}+\dfrac{1}{25}\right)-\left(-\dfrac{24y}{5}+\dfrac{144}{25}\right)=(4r+4)-(2r+1)$

整理して $9x+12y=5r+12\quad \therefore\ y=\dfrac{1}{12}\left(5r+\dfrac{9r}{5}\right)+1=\dfrac{17r}{30}+1$ …⑧ (∵⑦)

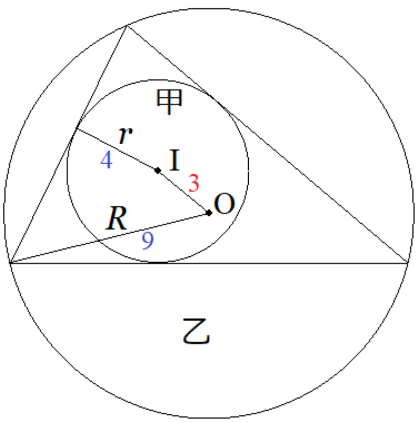
⑦⑧を⑤に戻して $\left(-\dfrac{r}{5}+2\right)^2+\left(\dfrac{17r}{30}+1\right)^2=(r+2)^2$

整理して $23r^2+132r-36=0$

$r>0$ でこれを解いて $r=\dfrac{-66+\sqrt{66^2+23\cdot 36}}{23}=\dfrac{-66+72}{23}=\dfrac{6}{23}$ …⑨

⑨は甲円の半径を 3 と設定して解いた結果なので, 原題の小円の半径は $23r=\mathbf{6}$ …[答]

［問題２］



オイラー・チャンプルの定理より

$IO^2=R(R-2r)=9(9-2\cdot 4)=9\quad \therefore\ IO=\mathbf{3}$ …[答]

［問題３］ 右図のように座標軸, 各点を定める。

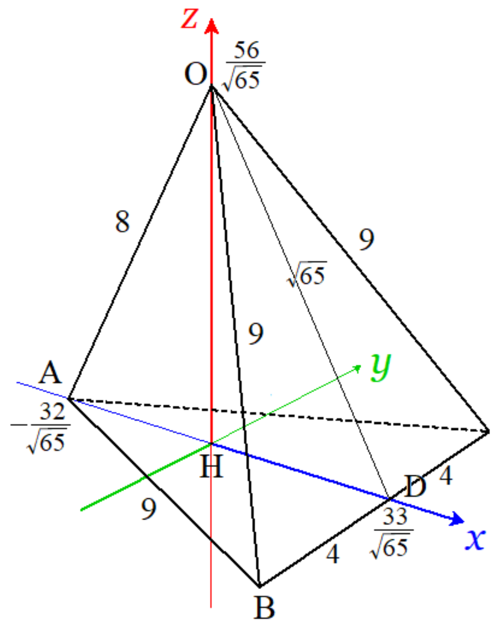
$\mathrm{AD}=\mathrm{OD}=\sqrt{9^2-4^2}=\sqrt{65}$

$\mathrm{AH}=a,\ \mathrm{DH}=d,\ \mathrm{OH}=h$ と置くと，

$a+d=\sqrt{65}$， $a^2+h^2=8^2,\ d^2+h^2=65$

これらを解いて $a=\dfrac{32}{\sqrt{65}},\ d=\dfrac{33}{\sqrt{65}},\ h=\dfrac{56}{\sqrt{65}}$

よって，各点の座標は図のように与えられる。このとき，



(1) 体積 $V=\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{65}\cdot 8\cdot\dfrac{56}{\sqrt{65}}=\mathbf{\dfrac{224}{3}}$ …[答]

(2) 外接円

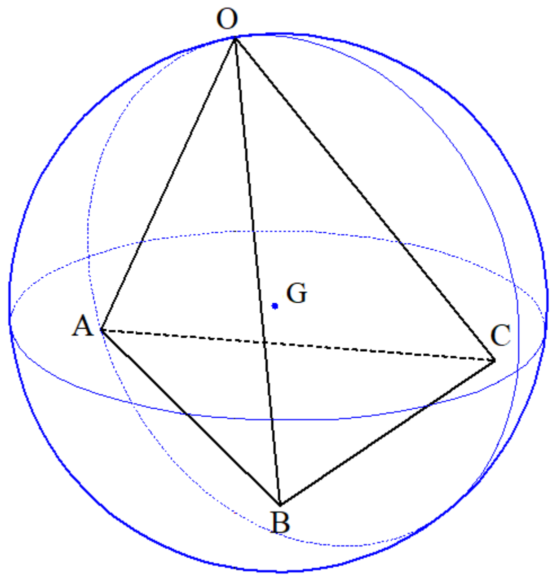
対称性より，半径を R, 中心を $\mathrm{G}(x,\ 0,\ z)$ とすると，

$$\mathrm{OG}^2=x^2+\left(z-\frac{56}{\sqrt{65}}\right)^2 \quad \cdots①$$

$$\mathrm{GA}^2=\left(x+\frac{32}{\sqrt{65}}\right)^2+z^2 \quad \cdots②$$

$$\mathrm{GB}^2=\left(x-\frac{33}{\sqrt{65}}\right)^2+16+z^2 \quad \cdots③$$

②＝③ を整理して $2\sqrt{65}\,x=17 \quad \therefore\ x=\dfrac{17}{2\sqrt{65}}$ …④



④を①②に戻し，①＝② として

$$\frac{17^2}{4\cdot 65}+\left(z-\frac{56}{\sqrt{65}}\right)^2=\frac{81^2}{4\cdot 65}+z^2$$

これを整理して解いて， $z=\dfrac{14}{\sqrt{65}}$ …⑤

④⑤を①に戻し，$R^2=\dfrac{113}{4} \quad \therefore\ R=\mathbf{\dfrac{\sqrt{113}}{2}}$ …[答]

(3) 内接円　半径を r, 中心を $\mathrm{N}(x,\ 0,\ r)$ とすると

面 OBC: $\dfrac{\sqrt{65}}{56}x+\dfrac{\sqrt{65}}{33}z=1$ …⑥

点 N が⑥の原点側にあるから，N と⑥の距離は

$$\frac{-\sqrt{65}/33\cdot x-\sqrt{65}/56\cdot r+1}{\sqrt{(\sqrt{65}/56)^2+(\sqrt{65}/33)^2}}=r$$

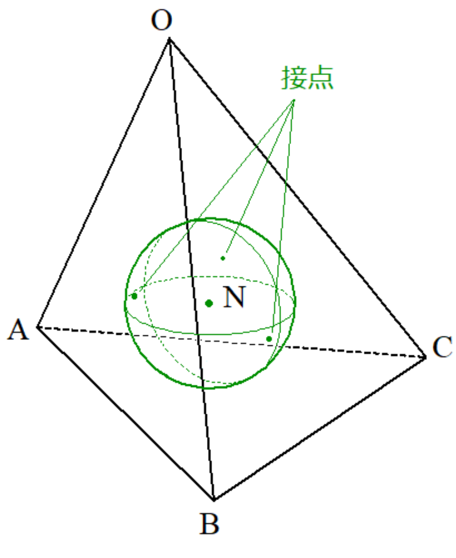
これを整理して　$4x+7r=\dfrac{132}{\sqrt{65}}$ …⑦

面 OAB と y 軸の交点座標は $-\dfrac{128}{65}$ だから

面 OAB: $-\dfrac{\sqrt{65}}{32}x+\dfrac{65}{128}y+\dfrac{\sqrt{65}}{56}z=1$ …⑧

点 N が⑧の原点側にあるから，N と⑧の距離は

$$\frac{\sqrt{65}/32\cdot x-\sqrt{65}/56\cdot r+1}{\sqrt{(\sqrt{65}/32)^2+(65/128)^2+(\sqrt{65}/33)^2}}=r$$



これを整理して　$-28x+81r=\dfrac{16\cdot 56}{\sqrt{65}}$ …⑨

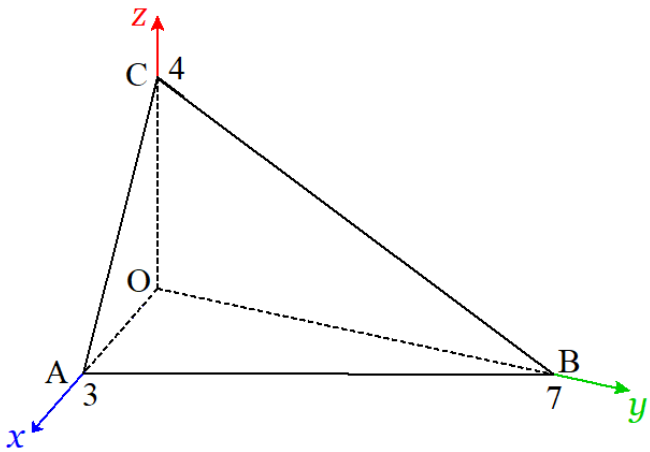
⑦⑨を解いて　$x=\dfrac{17}{2\sqrt{65}}$, $r=\dfrac{\mathbf{14}}{\sqrt{\mathbf{65}}}$ …[答]

G と N は一致して，ともに $\left(\dfrac{17}{2\sqrt{65}},\ 0\ ,\dfrac{14}{\sqrt{65}}\right)$ になるようですね。

内接球と各面との接点は $\left(\dfrac{3^5\cdot 11}{130\sqrt{65}},\ 0,\ \dfrac{2^2\cdot 7^3}{130\sqrt{65}}\right)$, $\left(\dfrac{3\cdot 107}{130\sqrt{65}},\ \pm\dfrac{2\cdot 7^2}{65},\ \dfrac{2^2\cdot 3^4\cdot 7}{130\sqrt{65}}\right)$ となるようです。

［問題４］　計算の便宜のため，原題と同じ右図の四面体について考察する。

座標軸･座標･各点を図のように定める。



(1)　表面積

$AB=\sqrt{58}$, $BC=\sqrt{65}$, $CA=5$ だから

$\triangle OAB=\dfrac{21}{2}$, $\triangle OBC=14$, $\triangle OCA=6$

$\triangle ABC=\cdots=\dfrac{37}{2}$ (←ヘロンの公式にて)

よって，表面積$=\dfrac{21}{2}+14+6+\dfrac{37}{2}=\mathbf{49}$ …[答]

(2) 外接円　半径を R, 中心を $G(x,\ y,\ z)$ とすると，

$OG=R$: $x^2+y^2+z^2=R^2$ …①

$AG=R$: $(x-3)^2+y^2+z^2=R^2$ …②

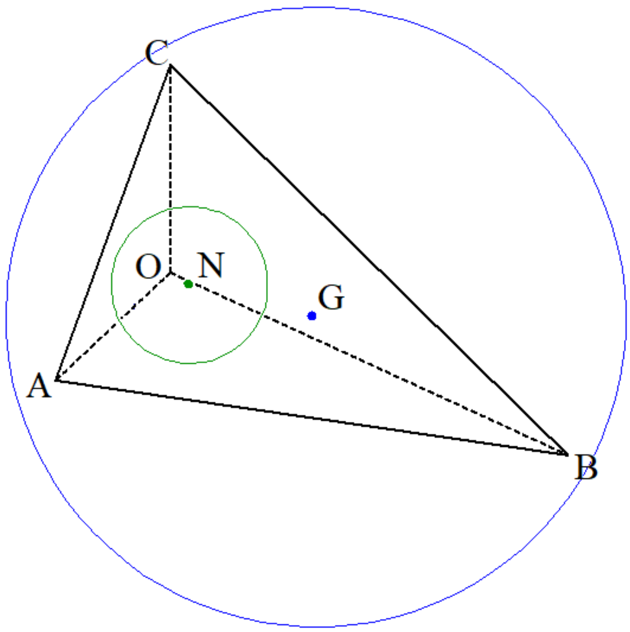
$BG=R$: $x^2+(y-7)^2+z^2=R^2$ …③

$CG=R$: $x^2+y^2+(z-4)^2=R^2$ …④

②－①: $-6x+9=0$　∴ $x=\dfrac{3}{2}$

①③④について同様にして，$y=\dfrac{7}{2}$, $z=2$

これらを①に戻して $R^2=\dfrac{74}{4}$, $R=\dfrac{\sqrt{\mathbf{74}}}{\mathbf{2}}$ …[答]



(3) 内接円　半径を r とすると，中心は $N(r,\ r,\ r)$

平面 ABC: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{4}=1$ …⑤

N は⑤の原点側にあるから，N と⑥の距離は

$$\frac{-r/3-r/7-r/4+1}{\sqrt{(1/3)^2+(1/7)^2+(1/4)^2}}=r$$

これを整理して解いて，$r=\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}$ …[答]