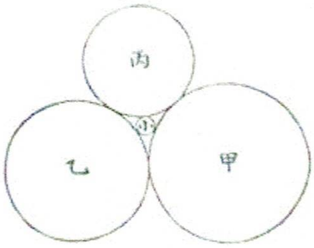
（問題 1）

互いに接する３個の甲乙丙の円径を六十九寸 ， 四十六」寸 ， 二十三寸とするとき, これらすべてに外接する小円の円径を求めよ。

答曰　六寸



今有如圖甲乙丙圓交鏁容小圓
甲圓径六十九寸乙圓径四十六寸丙圓径
二十三寸問小圓径幾何
答曰小圓径六寸

（解）

甲円、乙円、丙円、小円の半径をおのおのr_1, r_2, r_3, rとする。
デカルトの円定理より、以下の関係がある。

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

上式に与えられた甲円、乙円、丙円、小円の半径を代入し、r について解く。

$$\left(\frac{1}{34.5}+\frac{1}{23}+\frac{1}{11.5}+\frac{1}{r}\right)^2$$
$$= 2\left(\frac{1}{34.5^2}+\frac{1}{23^2}+\frac{1}{11.5^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$

であるから、

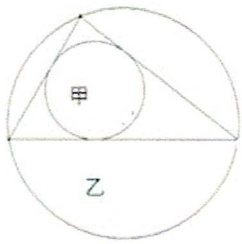
$$r = -69 \ or \ 3$$

を得る。$r > 0$であるから、小円の直径は 2r=6 寸となる。

（答　6 寸）

第 438 回数学的な連続応募問題

（問題 2）



三角形に内接する甲円と外接する乙円があり　甲の半径を四寸　乙円の半径を九寸とする。甲円乙円の中心間の距離を求めよ。

原典　オイラー・チャップル定理

（解）

内接円，外接円の中心(半径)をそれぞれ I(r)，O(R)とし，IO＝d とすると，オイラー・チャップルの定理より、以下の関係がある。

$$\frac{1}{R-d}+\frac{1}{R+d}=\frac{1}{r}$$

$r=4, R=9$であるから、上式をdについて解く。すると、

$$d=\pm 3$$

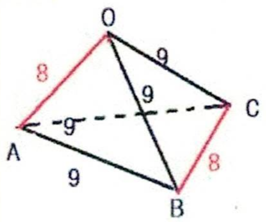
を得る。$d>0$であるから、d＝3 寸となる。

（答　3 寸）

第 438 回数学的な連続応募問題

(問題 3)

問題３



図のように三辺の長さが八、九、九である等面四面体ＯＡＢＣがある、次の値を求めよ。
（１）四面体ＯＡＢＣの体積
（２）四面体ＯＡＢＣ外接球の半径
（３）四面体ＯＡＢＣ内接球の半径

(解)

等面四面体の直方体への埋め込みを適用する。直方体の 1 辺の長さをおのおのx、y、zとすると、三平方の定理より、

$$x^2 + y^2 = p^2$$
$$y^2 + z^2 = q^2$$
$$z^2 + x^2 = r^2$$

となり、題意より p=9,q=9,r=8 であるから、

$$x = \sqrt{\frac{p^2 - q^2 + r^2}{2}} = \sqrt{32}$$

$$y = \sqrt{\frac{p^2 + q^2 - r^2}{2}} = 7$$

$$z = \sqrt{\frac{-p^2 + q^2 + r^2}{2}} = \sqrt{32}$$

を得る。等面四面体の体積Vは、$V = xyz/3$より、

$$V = \frac{(\sqrt{32})(7)(\sqrt{32})}{3} = \frac{224}{3}$$

となる。

次に、△ABO の面積Sを求める。△ABO の全周長を 2s とすると、

$$2s = 8 + 9 + 9 = 26$$

であるから、ヘロンの公式を適用し、

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-9)(s-9)(s-8)} \\ &= \sqrt{13(13-9)(13-9)(13-8)} \\ &= 4\sqrt{65} \end{aligned}$$

を得る。従って、等面四面体の全表面積は4Sであるから、

$$4S = 16\sqrt{65}$$

となる。

等面四面体の内接円の半径 ri および外接円の半径Rは、公式より

$$ri = \frac{3V}{4S} = \frac{3\left(\frac{224}{3}\right)}{16\sqrt{65}} = \frac{14\sqrt{65}}{65}$$

および、

$$R = \sqrt{\frac{p^2 + q^2 + r^2}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{9^2 + 9^2 + 8^2}{8}} = \frac{\sqrt{113}}{2}$$

となる。

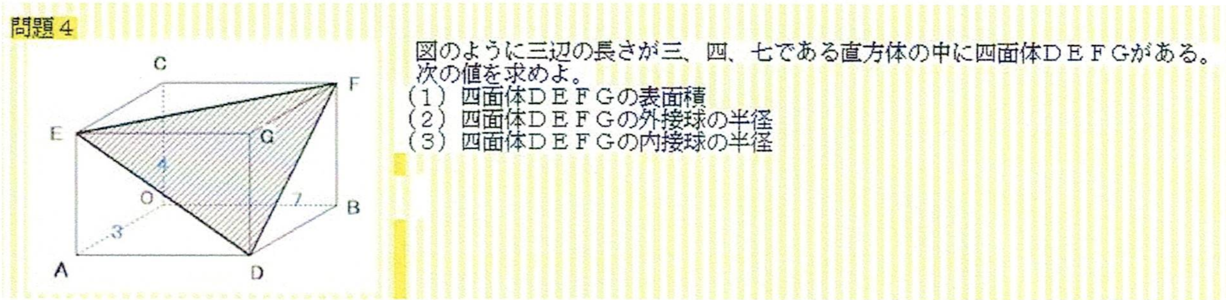
以上より、結果をまとめると、

- 等面四面体の体積V： $V = \frac{224}{3}$
- 全表面積4S： $4S = 16\sqrt{65}$
- 内接円の半径 ri： $ri = \frac{3V}{4S} = \frac{3\left(\frac{224}{3}\right)}{16\sqrt{65}} = \frac{14\sqrt{65}}{65}$
- 外接円の半径R： $R = \frac{\sqrt{113}}{2}$

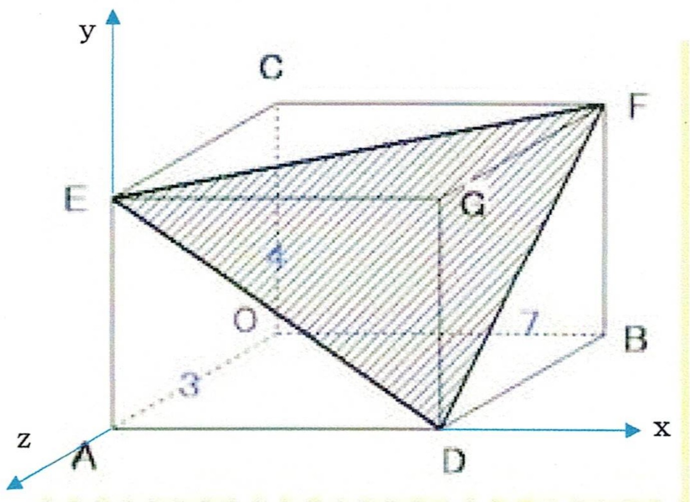
となる。

第 438 回数学的な連続応募問題

（問題 4）



（解）



（解）

ステップ 1（各点の座標）

上図に示す四面体の各頂点の座標を下記に示す。

D(7, 0, 0), E(0, 4, 0), F(7, 4, -3), G(7, 4, 0)

ステップ 2（体積の計算）

三角錐の体積を求める公式より、

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}(\text{底面積})(\text{高さ}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}7\cdot 4\right)(3) = 14}$$

を得る。

ステップ 3（表面積を求める）

表面積を各面毎に求めて、合算する。

$$\boldsymbol{S = \Delta DEG + \Delta DFG + \Delta EFG + \Delta DEF}$$

まずはじめに,三角形 DEF の面積を求める。三角形 DEF の全周長を 2s とすると、

$$\boldsymbol{2s = (DE) + (DF) + (EF) = \sqrt{65} + 5 + \sqrt{58}}$$

であるから、三角形 DEF の面積はヘロンの公式より、

$$\Delta DEF = \sqrt{s\left(s-\sqrt{65}\right)(s-5)\left(s-\sqrt{58}\right)} = 18.5$$

を得る。従って、三角錐の表面積は、

$$\begin{aligned} S &= \Delta DEG + \Delta DFG + \Delta EFG + \Delta DEF \\ &= \frac{1}{2}(7)(4) + \frac{1}{2}(3)(4) + \frac{1}{2}(7)(3) + 18.5 \\ &= 49 \end{aligned}$$

となる。

<u>ステップ4(外接円の半径を求める)</u>

三角錐の各頂点の位置ベクトルを以下に示す。

$$\boldsymbol{r_D} = 7\boldsymbol{i} \ \ , \boldsymbol{r_E} = 4\boldsymbol{j} \ \ , \boldsymbol{r_F} = 7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} \ , \boldsymbol{r_G} = 7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$$

四面体の外接円の中心座標は次式で与えられる。

$$\overrightarrow{r_0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_F} \\ \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_E} \\ \overrightarrow{r_E} - \overrightarrow{r_G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \|\overrightarrow{r_D}\|^2 - \|\overrightarrow{r_F}\|^2 \\ \|\overrightarrow{r_D}\|^2 - \|\overrightarrow{r_E}\|^2 \\ \|\overrightarrow{r_E}\|^2 - \|\overrightarrow{r_G}\|^2 \end{bmatrix}$$

はじめに、一項目の行列を求める。

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_F} \\ \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_E} \\ \overrightarrow{r_E} - \overrightarrow{r_G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \\ 7\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} \\ -7\boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 7 & -4 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上記の逆行列を計算する。

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_F} \\ \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_E} \\ \overrightarrow{r_E} - \overrightarrow{r_G} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/7 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

また、

$$\begin{bmatrix} \|\overrightarrow{r_D}\|^2 - \|\overrightarrow{r_F}\|^2 \\ \|\overrightarrow{r_D}\|^2 - \|\overrightarrow{r_E}\|^2 \\ \|\overrightarrow{r_E}\|^2 - \|\overrightarrow{r_G}\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 - 74 \\ 49 - 16 \\ 16 - 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 33 \\ -49 \end{bmatrix}$$

であるから、

$$\overrightarrow{r_0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_F} \\ \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_E} \\ \overrightarrow{r_E} - \overrightarrow{r_G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \|\overrightarrow{r_D}\|^2 - \|\overrightarrow{r_F}\|^2 \\ \|\overrightarrow{r_D}\|^2 - \|\overrightarrow{r_E}\|^2 \\ \|\overrightarrow{r_E}\|^2 - \|\overrightarrow{r_G}\|^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -25 \\ 33 \\ -49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

となる。つまり、直方体の中心となる。従って四面体 DEFG の外接球の半径rは外接球の中心から四面体の頂点までの距離であるから、

$$r = (r_0E) = \sqrt{(3.5-0)^2 + (2-4)^2 + (-1.5-0)^2} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

$$r = (r_0D) = \sqrt{(3.5-7)^2 + (2-0)^2 + (-1.5-0)^2} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

$$r = (r_0F) = \sqrt{(3.5-7)^2 + (2-4)^2 + (-1.5+3)^2} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

$$r = (r_0G) = \sqrt{(3.5-7)^2 + (2-4)^2 + (-1.5-0)^2} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

となる。上記に示されるように外接球の中心から四面体の頂点までの各距離はすべて等しくなっており、r_0は外接球の中心で、その半径は$\frac{\sqrt{74}}{2}$であることが確認された。

ステップ 5（内接円の半径）

四面体 DEFG の内接球の半径 R は、公式より、

$$R = \frac{3V}{S}$$

$$= \frac{3 \cdot 14}{49} = \frac{6}{7}$$

となる。

ステップ6（結果）

以上結果をまとめると、

（1）　四面体 EFG の表面積は S=49

（2）　四面体 EFG の外接球の半径は $r = \frac{\sqrt{74}}{2}$

（3）　四面体 EFG の内接球の半径は R = 6/7

となる。