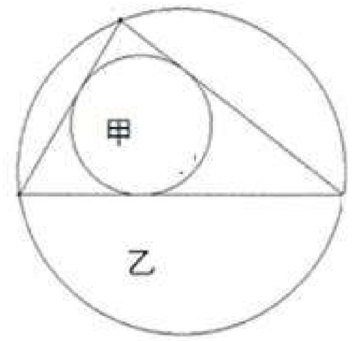
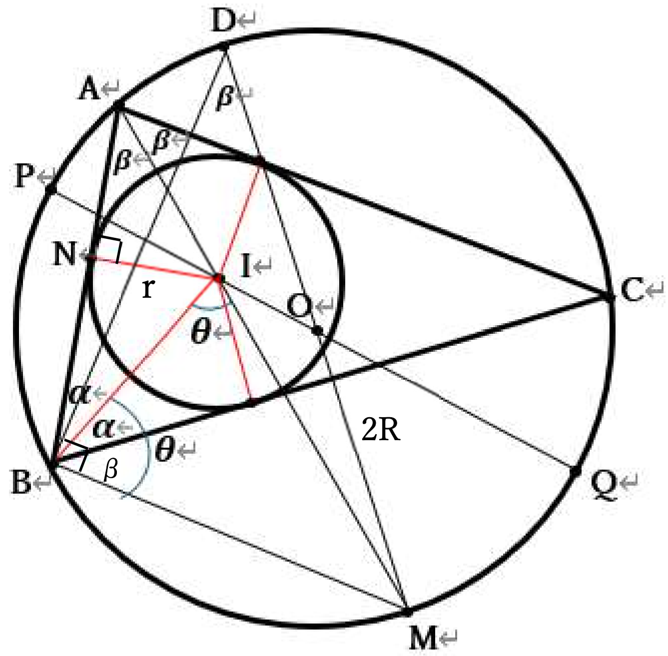
# オイラー・チャップル定理




三角形に内接する甲円と外接する乙円があり
甲の半径を四寸　乙円の半径を九寸とする。
甲円乙円の中心間の距離を求めよ。




（解）

本項では、オイラー・チャップル定理を適用せずに求め、その結果をオイラー・チャップル定理を用いて得た結果と比較する。

甲円、乙円の半径をおのおのをｒ、R とする。また、甲円と乙円の中心間距離をｄとする。

内接円の中心 I と外接円の中心 O を通る直線が外接円と交わる点をおのおの P,Q とする。また、点 A と内接円の中心 I を通る直線が外接円と交わる点を M とし、M から外接円の中心 O を通り、外接円と交わる点を D とする（上図参照）。すると、方べきの定理より、

$$(\mathbf{PI})(\mathbf{IQ}) = (\mathbf{AI})(\mathbf{IM})$$

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d})(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{d}) = (\mathbf{AI})(\mathbf{IM}) \quad \cdots \ (\mathbf{1})$$

と表される。

　次に上図において、$\angle \boldsymbol{BIM} = \boldsymbol{\vartheta}$とすると、

$$\boldsymbol{\theta} = \angle \boldsymbol{BIM} = \boldsymbol{\pi} - \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{\alpha}\right) - \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{\beta}\right)$$

$$= \boldsymbol{\pi} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\beta}$$

$$= \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$$

次に、円周角に性質から、$\angle \boldsymbol{MBC} = \angle \boldsymbol{MAC} = \boldsymbol{\beta}$であるから、

$$\angle \boldsymbol{MBI} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\vartheta}$$

となり、三角形 BMI は二等辺三角形となる。従って、$\boldsymbol{BM} = \boldsymbol{IM}$となる。三角形 ANI と三角形 BDM は相似でるから、

$$\frac{(\boldsymbol{NI})}{(\boldsymbol{AI})} = \frac{(\boldsymbol{BM})}{(\boldsymbol{DM})} = \frac{(\boldsymbol{IM})}{(\boldsymbol{DM})} \quad \cdots (\mathbf{2})$$

となる。ここで、図に示されるように$(\boldsymbol{NI}) = \boldsymbol{r}, (\boldsymbol{DM}) = \mathbf{2}\boldsymbol{R}$ であるから,

$$\frac{\boldsymbol{r}}{(\boldsymbol{AI})} = \frac{(\boldsymbol{IM})}{\mathbf{2}\boldsymbol{R}} \qquad \cdots \ (\mathbf{3})$$

(3)式を(1)式に代入する。

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{d})(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{d}) = (\mathbf{AI})(\mathbf{IM}) = (\mathbf{2}\boldsymbol{R})(\boldsymbol{r}) \quad \cdots (\mathbf{4})$$

を得る。（４）式を d について解くと、

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{Rr}} \quad (\because \mathbf{d} < \mathbf{0}\text{は不適}) \quad \cdots (\mathbf{5})$$

となる。題意より、R＝9 寸、ｒ＝4 寸であるから、甲円と乙円の中心間距離は、

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{\mathbf{9}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{9} \cdot \mathbf{4}} = \mathbf{3}\ \text{寸}$$

となる。

（追）<u>オイラー・チャップル定理の形式</u>

　(5)式が次式に示されるオイラー・チャップル定理の公式と一致するか確認する。以下にオイラー・チャップル定理の式を示す。

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R} - \boldsymbol{d}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R} + \boldsymbol{d}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}$$

はじめに(5)式の$[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d})(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{d})=\mathbf{2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}]$の逆数を取る。

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d})(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{d})}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}}$$

$$\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{R}}{(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d})(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{d})}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}$$

上式左辺を部分分数に取ると、

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}+\boldsymbol{d}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}$$

となる。従って、(5)式はオイラー・チャップル定理の式と同一である。

以上