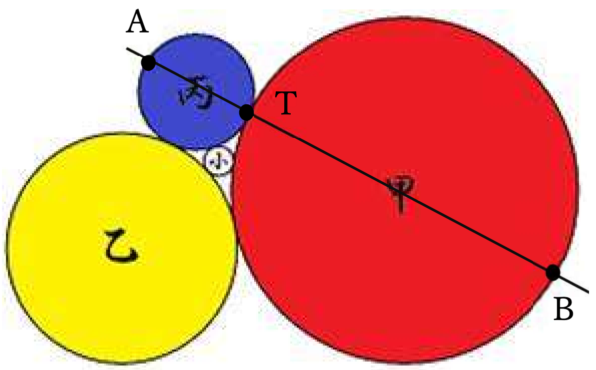
デカルトの円定理



第１図(元図)

互いに接する３個の甲乙丙の円径を六十九寸，四十六」寸，二十三寸とするとき,これらすべてに外接する小円の円径を求めよ。

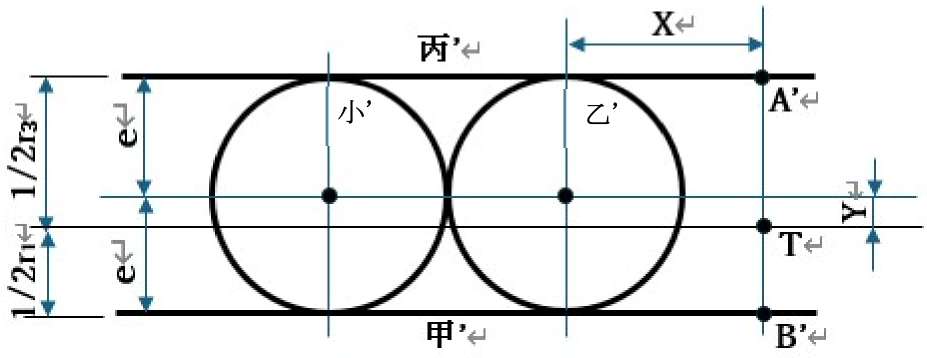
答曰　六寸

（目的）

本項では、デカルトの円定理の公式を用いずに本問題を解き、その結果をデカルトの円定理と比較し、最終的にはデカルトの円定理の公式と一致することを確認する。

（解）

甲円、乙円、丙円および小円の半径をおのおの$\boldsymbol{r1}, \boldsymbol{r2}, \boldsymbol{r3}, \boldsymbol{r}$とする。そして次に、第１図に示される甲円と丙円の接点 T を中心に反転する。反転円の半径は k=1 とする。以下第２図に反転図を示す。反転像の乙'円、小'円の半径を e とおく。



第２図　反転図

反転の定義より、

$$(\boldsymbol{TA})(\boldsymbol{TA'}) = \boldsymbol{k}^2 = \mathbf{1}^2 \quad \therefore \ (\boldsymbol{TA'}) = \frac{\boldsymbol{k}^2}{(\boldsymbol{TA})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{r}_3} \quad \cdots (\mathbf{1})$$

$$(\boldsymbol{TB})(\boldsymbol{TB'}) = \boldsymbol{k}^2 = \mathbf{1}^2 \quad \therefore \ (\boldsymbol{TB'}) = \frac{\boldsymbol{k}^2}{(\boldsymbol{TB})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{r}_1} \quad \cdots (\mathbf{2})$$

$$e = \frac{1}{2}\{(TA') + (TB')\} = \frac{r_1 + r_3}{4r_1r_3} \qquad \cdots(3)$$

となる。

ステップ１（反転中心Ｔと乙’円中心の位置関係を求める）

反転中心Ｔと乙’円中心の水平方向の距離をX,鉛直方向の距離をＹおく（反転図参照)。すると、

$$Y = e - \frac{1}{2r_1} = \frac{r_1 + r_3}{4r_1r_3} - \frac{1}{2r_1} = \frac{r_1 - r_3}{4r_1r_3} \qquad \cdots(4)$$

となる。次に、反転中心Ｔから乙’円に引いた接線の長さ $t_{乙}$ を求める。

$$\begin{aligned}(t_{乙})^2 &= (X^2 + Y^2) - e^2 \\ &= X^2 + \left(\frac{r_1 - r_3}{4r_1r_3}\right)^2 - \left(\frac{r_1 + r_3}{4r_1r_3}\right)^2 \\ &= X^2 - \frac{r_1r_3}{4{r_1}^2{r_3}^2}\end{aligned}$$

乙’円の半径 r_2 は反転基本式より、

$$r_2 = \frac{k^2}{(t_{乙})^2}e = \frac{1}{X^2 - \frac{r_1r_3}{4{r_1}^2{r_3}^2}} \cdot \frac{r_1 + r_3}{4r_1r_3}$$

$$= \frac{r_1r_3(r_1 + r_3)}{4\,{r_1}^2{r_3}^2X^2 - r_1r_3}$$

従って、

$$\begin{aligned}r_2(4\,{r_1}^2{r_3}^2X^2 - r_1r_3) &= r_1r_3(r_1 + r_3) \\ 4{r_1}^2r_2{r_3}^2X^2 - r_1r_2r_3 &= {r_1}^2r_3 + r_1{r_3}^2 \\ 4{r_1}^2r_2{r_3}^2X^2 &= r_1r_3(r_1 + r_2 + r_3) \\ 4r_1r_2r_3X^2 &= r_1 + r_2 + r_3\end{aligned}$$

∴

$$X^2 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{4r_1r_2r_3} \qquad \cdots(5)$$

を得る。

ステップ２（小円径を求める）

反転中心Ｔから小’円に引いた接線の長さ($t_{小}$)を求める。

$$(\mathrm{t}_{小})^2 = \left\{\left(X + 2\sqrt{e \cdot e}\right)^2 + Y^2\right\} - e^2$$

$$= X^2 + 4Xe + 3e^2 + Y^2$$

上式に(3),(4),(5)式を代入する。

$$(\mathrm{t}_{小})^2 = \frac{r_1+r_2+r_3}{4r_1r_2r_3} + 4\cdot\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{4r_1r_2r_3}}\cdot\frac{r_1+r_3}{4r_1r_3} + 3\left(\frac{r_1+r_3}{4r_1r_3}\right)^2 + \left(\frac{r_1-r_3}{4r_1r_3}\right)^2$$

$$= \frac{r_1+r_2+r_3}{4r_1r_2r_3} + \frac{r_1+r_3}{2r_1r_3}\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}} + \frac{4{r_1}^2+4r_1r_3+4{r_3}^2}{16{r_1}^2{r_3}^2}$$

$$= \frac{r_1+r_2+r_3}{4r_1r_2r_3} + \frac{{r_1}^2+r_1r_3+{r_3}^2}{4{r_1}^2{r_3}^2} + \frac{r_1+r_3}{2r_1r_3}\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}}$$

$$= \frac{r_1r_3\sqrt{r_1r_2r_3}(r_1+r_2+r_3) + r_2\sqrt{r_1r_2r_3}({r_1}^2+r_1r_3+{r_3}^2) + 2r_1r_2r_3(r_1+r_3)\sqrt{r_1r_2r_3}}{4{r_1}^2r_2{r_3}^2\sqrt{r_1r_2r_3}}$$

$$= \frac{(r_1+r_3)\left(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3}\sqrt{r_1+r_2+r_3}\right)}{4{r_1}^2r_2{r_3}^2}$$

反転基本式より、

$$r = \frac{k^2}{(\mathrm{t}_{小})^2}e$$

$$= \frac{4{r_1}^2r_2{r_3}^2}{(r_1+r_3)\left(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3}\sqrt{r_1+r_2+r_3}\right)}\cdot\frac{r_1+r_3}{4r_1r_3}$$

$$= \frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3}\sqrt{r_1+r_2+r_3}}$$

従って、

$$r\left(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3}\sqrt{r_1+r_2+r_3}\right) = r_1r_2r_3$$

$$2\sqrt{r_1r_2r_3}\sqrt{r_1+r_2+r_3} = \frac{r_1r_2r_3}{r} - r_1r_2 - r_2r_3 - r_3r_1$$

両辺を$r_1r_2r_3$で割る。

$$2\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \qquad \cdots(6)$$

題意より、甲乙丙の反径は、34.5 寸、23 寸、11.5 寸であるから、これらを(6)式に代入し、小円の半径 r を求める。

$$2\sqrt{\frac{34.5+23+11.5}{34.5\cdot 23\cdot 11.5}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{11.5} - \frac{1}{34.5} - \frac{1}{23}$$

$$2\left(\frac{2}{23}\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{11.5} - \frac{1}{34.5} - \frac{1}{23}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{3}$$

従って、小円の直径は 2r=6 寸となる。よって、デカルトの円定理の公式から得られた結果と一致する。

ステップ 3（デカルトの円定理との比較）

ステップ 2 で得られた(6)式がデカルトの円定理の公式と一致するのかを確認する。以下にデカルトの円定理の公式を示す。

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}\right)\quad\cdots(7)$$

(6)式を変形し、(7)式が得られるか整理する。以下(6)式を示す。

$$2\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\qquad\cdots(6)$$

(6)式の両辺を平方する。

$$\begin{aligned}4\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}\right)&=\left\{\frac{1}{r}-\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\right\}^2\\&=\frac{1}{r^2}-\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2\end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2$を求めるため、上式の右辺を修正する。

$$\begin{aligned}4\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}\right)&=\left[\frac{1}{r^2}+\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2\right]-\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\\&=\left\{\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\right\}^2-\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\end{aligned}$$

上式の右辺の 2 項目を左辺に移行する。

$$4\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}\right)+\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)=\left\{\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\right\}^2$$

$$4\left(\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}+\frac{1}{r}\cdot\frac{r_2r_3+r_1r_3+r_1r_2}{r_1r_2r_3}\right)=\left\{\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\right\}^2$$

$$4\frac{rr_1+rr_2+rr_3+r_2r_3+r_1r_3+r_1r_2}{rr_1r_2r_3}=\left\{\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)\right\}^2$$

従って、

$$\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right\}^2=4\left(\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{rr_1}+\frac{1}{rr_2}+\frac{1}{rr_3}\right)\quad\cdots(8)$$

となる。

次に、(7)式の右辺に(8)式の右辺を加える。

$$2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}\right)+\ 4\left(\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{rr_1}+\frac{1}{rr_2}+\frac{1}{rr_3}\right)$$

$$=2\left[\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}+\frac{2}{r_2r_3}+\frac{2}{r_1r_3}+\frac{2}{r_1r_2}+\frac{2}{rr_1}+\frac{2}{rr_2}+\frac{2}{rr_3}\right]$$

$$=2\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{2}{r_1r_2}+\frac{2}{r_2r_3}+\frac{2}{r_3r_1}+\frac{2}{rr_1}+\frac{2}{rr_2}+\frac{2}{rr_3}\right]\quad\cdots(9)$$

そして、(7)式の左辺を展開する。

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2=\frac{1}{r^2}+\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2$$

$$=\frac{1}{r^2}+\frac{2}{rr_1}+\frac{2}{rr_2}+\frac{2}{rr_3}+\left\{\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{2}{r_1}\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{r^2}+\frac{2}{rr_1}+\frac{2}{rr_2}+\frac{2}{rr_3}+\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{2}{r_1r_2}+\frac{2}{r_3r_1}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{2}{r_2r_3}+\frac{1}{{r_3}^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{2}{r_1r_2}+\frac{2}{r_2r_3}+\frac{2}{r_3r_1}+\frac{2}{rr_1}+\frac{2}{rr_2}+\frac{2}{rr_3}\quad\cdots(10)$$

(9),(10)式を比較すると、(9) 式の右辺のカッコ内の項は(10)式の右辺と一致していることが分かる。すなわち、

$$2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}\right)+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2$$

となる。従って、

$$2\left(\frac{1}{{r_1}^2}+\frac{1}{{r_2}^2}+\frac{1}{{r_3}^2}+\frac{1}{r^2}\right)=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2\quad\cdots(11)$$

となる。以上より、(11)式は(7)式と一致することが分かる。つまり、(6)式はデカルトの円定理の公式と同一であることが確認された。

以上