第 439 回

問題 1

実数 x, y, z が $x+y+z=3$ ， $xyz=1$ を満たすとき， z の値の範囲を求めよ。

解答　$x+y+z=3$ より， $x+y=3-z$ ， $xyz=1$ より， $xy=\dfrac{1}{z}$

x, y は， $t^2-(3-z)t+\dfrac{1}{z}=0$ の２解

この２次方程式の判別式を D とおくと，実数解をもつので， $D\geqq 0$ である。

$D=(3-z)^2-\dfrac{4}{z}=\dfrac{(z-1)^2(z-4)}{z}\geqq 0$ より， $z<0$ ， $z=1$ ， $4\leqq z$　答

問題 2

$x>0$, $y>0$ で， $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ を満たすとき， $x+y$ の最大値を求めよ。

解答　$x>0$, $y>0$ に注意して計算していく。

$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$　…①　$x+y=k$　…②とおく。

①の右辺は正より， $x>y$　…③

①を y について整理すると， $y^4+(2x^2+1)y^2+x^2(x^2+1)=0$

$y^2>0$より， $y^2=\dfrac{-(2x^2+1)+\sqrt{(2x^2+1)^2-4x^2(x^2+1)}}{2}=\dfrac{-2x^2-1+\sqrt{8x^2+1}}{2}$

ただし， $-2x^2-1+\sqrt{8x^2+1}>0$ より， $0<x<1$

$y>0$ より， $y=\sqrt{\dfrac{-2x^2-1+\sqrt{8x^2+1}}{2}}$　…①′

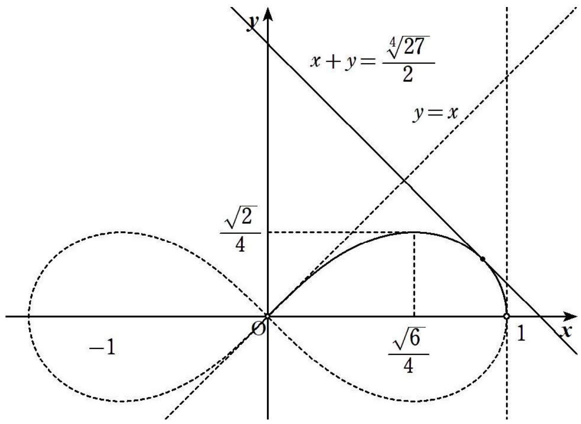
①′の両辺を x で微分すると，

$$y'=\frac{\sqrt{2}\,x\left(2-\sqrt{8x^2+1}\right)}{\sqrt{8x^2+1}\sqrt{-2x^2-1+\sqrt{8x^2+1}}}$$

$$=\frac{\left(2-\sqrt{8x^2+1}\right)\sqrt{2x^2+1+\sqrt{8x^2+1}}}{\sqrt{2}\sqrt{8x^2+1}\sqrt{1-x^2}}$$

$y'=0$ とおくと， $x=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$	$\cdots$	1
y'	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	0



増減表により，①′のグラフは曲線で右図（実線部分）のようになる。

次に，②は傾き -1 ， y 切片 k の直線で，①′と接するとき k の値は最大となる。

①の両辺を x で微分すると， $2(x^2+y^2)\left(2x+2y\dfrac{dy}{dx}\right)=2x-2y\dfrac{dy}{dx}$

接点での傾きは -1 であるから， $\dfrac{dy}{dx}=-1$ を代入して整理すると， $2(x^2+y^2)(x-y)=x+y$　…④

①を④で辺々割り算をすると，$\dfrac{x^2+y^2}{2(x-y)}=x-y$　$x^2-4xy+y^2=0$　$y=(2\pm\sqrt{3})x$

③より，$y=(2-\sqrt{3})x$　…⑤

これを①に代入して，$\{x^2+(2-\sqrt{3})^2x^2\}^2=x^2-(2-\sqrt{3})^2x^2$　$x>0$ より，$x=\dfrac{\sqrt{6+4\sqrt{3}}}{4}$

⑤より，$y=\dfrac{\sqrt{-6+4\sqrt{3}}}{4}$

よって，$x+y$ の最大値は，

$$\frac{\sqrt{6+4\sqrt{3}}}{4}+\frac{\sqrt{-6+4\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{6+4\sqrt{3}-6+4\sqrt{3}+2\sqrt{(6+4\sqrt{3})(-6+4\sqrt{3})}}}{4}=\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$$ 答

（$x=\dfrac{\sqrt{6+4\sqrt{3}}}{4}$，$y=\dfrac{\sqrt{-6+4\sqrt{3}}}{4}$ のとき）

補足　$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ のグラフは連珠形（*Lemniscate*）という。

一般に，２定点 $(-a,\ 0)$，$(a,\ 0)$ からの距離の積が a^2 になる点を $(x,\ y)$ とおくと，

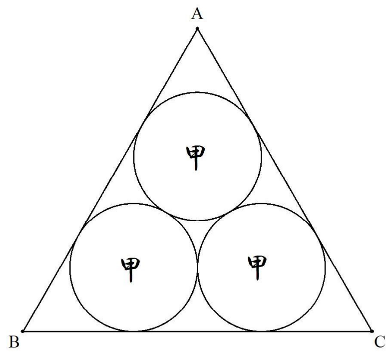
$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2$ より，$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$　…(*)

問題２は，$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の場合である。

また，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおくと，(*) は，$r^2=2a^2\cos 2\theta$（極形式）と表される。

追加問題１

１辺の長さが１の正三角形 ABC の中に
互いに接する甲円３個を内接させる。
甲円の半径を求めよ。

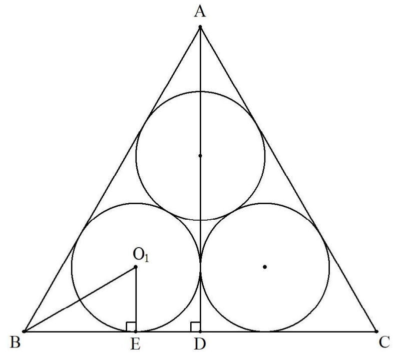


解答　左下の甲円を $O_1\,(r_1)$ とおき，図のように記号を付ける。

$\triangle O_1BE$ について，$\angle O_1BE=30^\circ$，$O_1E=r_1$ であるから，$BE=\sqrt{3}r_1$

$BD=BE+ED=\sqrt{3}r_1+r_1=\dfrac{1}{2}$ より，$r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$　（≒ 0.183013）

よって，甲円の半径は，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$　答



別解　左下の甲円は△ABD の内接円であるから，

その半径は，$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$　答

追加問題 2

ある本屋さんで次の様なキャンペーンが行われた。本を 1 冊買うたびにトランプのしおりが付いてくる。そして 1 ペアがそろえば記念品がもらえるという。ジョーカーはなく，同じカード 2 枚でも 1 ペアとみなす。記念品をもらうために買う本の冊数の期待値を求めよ。

解答　トランプの数は A，2，$\cdots$，10，J，Q，K の 13 種類あるから，13 枚目まで全部違う数のカードでも 14 枚目で必ずワンペアができる。（鳩の巣原理）

トランプには同じ数のカードは 4 枚ずつあるから，どの数のカードを引く確率も $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ となる。

n 枚目でワンペアができる確率を $P(n)$ とおく。

$P(1)=0$ である。

$n \geqq 2$ のとき，$P(n)$ は，$n-1$ 枚目まで異なる数のカードを引き，n 枚目には既に引いてある $n-1$ 枚のどれかを引けばよいから，$P(n)=\left(\frac{13}{13}\cdot\frac{12}{13}\cdot\cdots\cdot\frac{15-n}{13}\right)\cdot\frac{n-1}{13}=\frac{13!}{13^{n-1}\cdot(14-n)!}\cdot\frac{n-1}{13}$ となる。

求める期待値 E は，

$$E=\sum_{k=1}^{14} kP(k)=1\times 0+2\times\frac{13!}{13^1\cdot 12!}\cdot\frac{1}{13}+3\times\frac{13!}{13^2\cdot 11!}\cdot\frac{2}{13}+4\times\frac{13!}{13^3\cdot 10!}\cdot\frac{3}{13}+5\times\frac{13!}{13^4\cdot 9!}\cdot\frac{4}{13}$$

$$+6\times\frac{13!}{13^5\cdot 8!}\cdot\frac{5}{13}+7\times\frac{13!}{13^6\cdot 7!}\cdot\frac{6}{13}+8\times\frac{13!}{13^7\cdot 6!}\cdot\frac{7}{13}+9\times\frac{13!}{13^8\cdot 5!}\cdot\frac{8}{13}+10\times\frac{13!}{13^9\cdot 4!}\cdot\frac{9}{13}$$

$$+11\times\frac{13!}{13^{10}\cdot 3!}\cdot\frac{10}{13}+12\times\frac{13!}{13^{11}\cdot 2!}\cdot\frac{11}{13}+13\times\frac{13!}{13^{12}\cdot 1!}\cdot\frac{12}{13}+14\times\frac{13!}{13^{13}\cdot 0!}\cdot\frac{13}{13}$$

$$=\frac{121437725363954}{13^{12}}=\frac{121437725363954}{23298085122481}$$ 答

補足　近似値は，5.21235

（2024/3/18　ジョーカー）