2024/03/25 修正

問題1　$z \neq 0$なので、

$$xyz = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{z}$$

と変形しても構いません。また、

$$x + y + z = 3 \Rightarrow x + y = z - 3$$

なので、解と係数の関係より、x、yは次の方程式の解です。

$$t^2 - (z - 3)t + \frac{1}{z} = 0$$

すると、$t\left(つまり、x, y\right)$は実数なので、判別式をDとすると、

$$D = (z - 3)^2 - \frac{4}{z} \geq 0$$

です。

$$f(z) = (z - 3)^2 - \frac{4}{z}$$

として、f(z)の増減表を作成します。まず、

$$f(z) = 0 \Rightarrow (z - 3)^2 - \frac{4}{z} = 0 \Rightarrow z = 1,4$$

次に、f(z)を微分して、

$$f(z)' = \frac{2z^3 - 6z^2 + 4}{z^2}$$

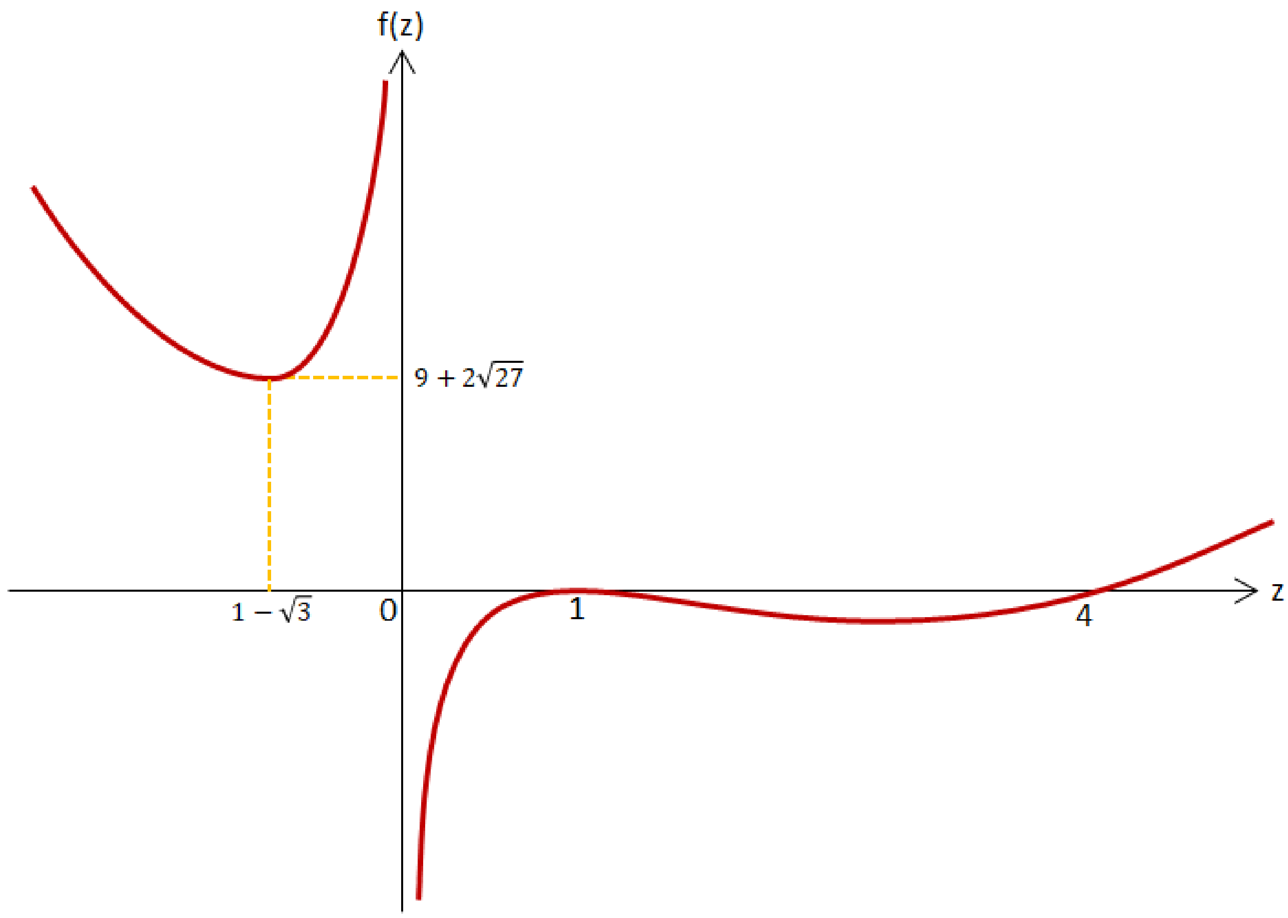
となり、

$$f(z)' = 0 \Rightarrow \frac{2z^3 - 6z^2 + 4}{z^2} = 0 \Rightarrow z = 1,1 \pm \sqrt{3}$$

なので、増減表は次ページの通りです。

z	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f(z)'$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\frac{9}{4}$	$+$
$f(z)$	↘	$9+2\sqrt{27}$	↗		↗	0	↘	$9-2\sqrt{27}$	↗	0	↗

グラフの外観は以下です。



$f(z) \geq 0$となるのは、$z < 0, z = 1, z \geq 4$の場合です。

以上より、zの範囲は、$z < 0, z = 1, z \geq 4$です。

問題２ 表題に『媒介変数』と記されているので、その方針でやりました。与式にx^2とy^2が含まれるので、極座標系を導入するのが良いと思います。

$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \cdots ①$

で変換します。ただし、$x > 0$、$y > 0$なので、$r > 0$、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$です。

まず、条件式を変換すると、

$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$

$\Rightarrow r^2(\cos 2\theta - r^2) \Rightarrow r^2 = \cos 2\theta \cdots ②$

です。次に、$x + y$はそのままでは扱い難いので、$x > 0$、$y > 0$ですから、二乗して考えます。すると、

$(x + y)^2 \Rightarrow (r\cos\theta + r\cos\theta)^2 \Rightarrow r^2(\sin 2\theta + 1) = \cos 2\theta\,(\sin 2\theta + 1)$

となり、変数がθだけになります。後は定石通りにやって、

$f(\theta) = \cos 2\theta\,(\sin 2\theta + 1)$

とおき、$f(\theta)$の動向を調べます。$f(\theta)$を微分して、

$f(\theta)' = -2\sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos^2 2\theta = -2(\sin 2\theta + 1)(2\sin 2\theta - 1)$

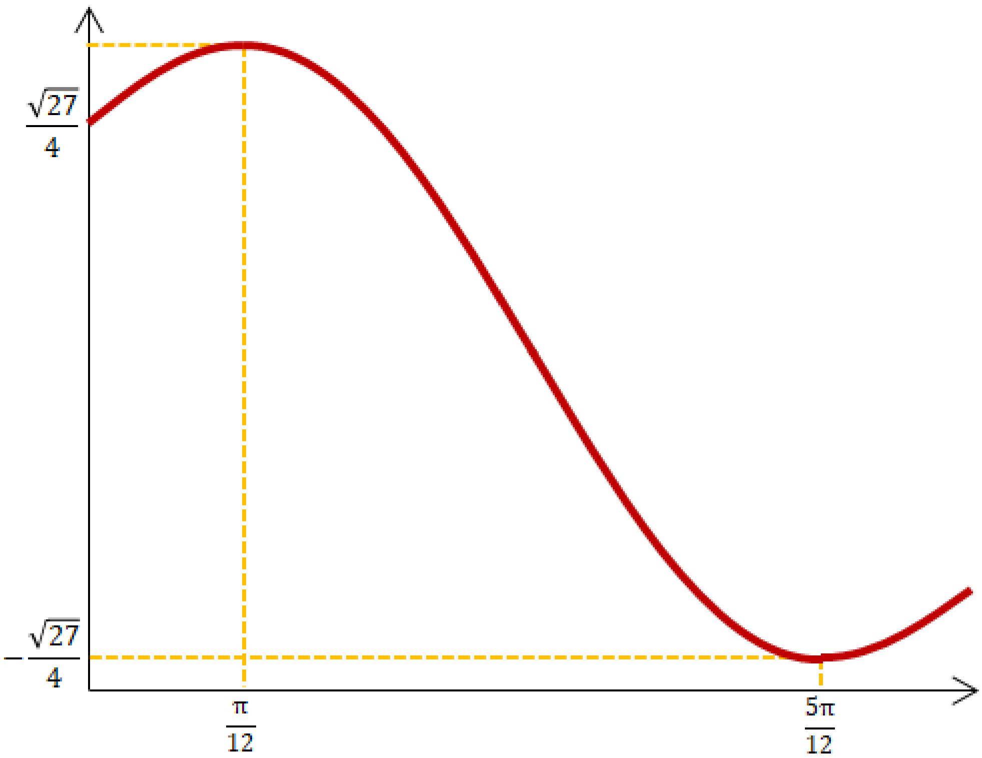
となり、

$f(\theta)' = 0 \Rightarrow 2\sin 2\theta - 1 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$

なので、増減表は以下です。

θ	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{12}$	$\cdots$
$f(\theta)'$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(\theta)$	↗	$\frac{\sqrt{27}}{4}$	↘	$-\frac{\sqrt{27}}{4}$	↗

グラフの外観は次の通りです。



$\theta=\frac{\pi}{12}$のとき、$f(\theta)$は最大値$\frac{\sqrt{27}}{4}$をとることがわかります。

このとき、②式に$\theta=\frac{\pi}{12}$を代入して、

$$r^2=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)\Rightarrow r=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$$

また、①式より、

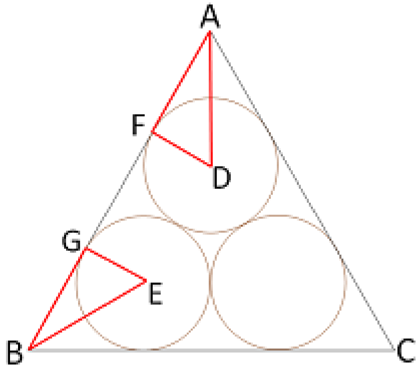
$$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)=\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12},\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{3}(\sqrt{3}+1)}{4},\frac{\sqrt[4]{3}(\sqrt{3}-1)}{4}\right)\Rightarrow x+y=\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$$

以上より、$(x,y)=\left(\frac{\sqrt[4]{3}(\sqrt{3}+1)}{4},\frac{\sqrt[4]{3}(\sqrt{3}-1)}{4}\right)$のとき、$x+y$は最大値$\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$です。

問題3



左図のように、甲円の中心D、EからABに垂直に下した点をF、Gとします。⊿ADFは直角三角形で、$\angle DAF = 30°$なので、甲円の半径をrとすると、

$$\mathrm{AF} = \sqrt{3}\mathrm{r}$$

です。

また、⊿BEGについても同様にして、

$$\mathrm{BG} = \sqrt{3}\mathrm{r}$$

です。すると、

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AF} + \mathrm{FG} + \mathrm{BG} = \sqrt{3}\mathrm{r} + \mathrm{r} + \mathrm{r} + \sqrt{3}\mathrm{r} = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\mathrm{r}$$

です。ここで、⊿ABCの一辺の長さが1なので、

$$\mathrm{AB} = 1 \Rightarrow \left(2 + \sqrt{3}\right)\mathrm{r} = 1 \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$

となります。以上より、甲円の半径は$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$です。

問題4　n冊目で同じ数字のカードをもらう確率P_nは

$$P_n = \left(1\text{ から }n-1\text{ 冊目まで異なる数字のカードをもらう確率}\right)$$

$$\times \left(n\text{ 冊目で以前と同じ数字のカードをもらう確率}\right)$$

$$= \frac{13-0}{13} \cdot \frac{13-1}{13} \cdot \frac{13-2}{13} \cdots \frac{13-(n-1)}{13} \times \frac{n-1}{13} = \frac{12!\,(n-1)}{(14-n)!\,13^{n-1}}$$

となるので、期待値Eは

$$E = \sum_{n=1}^{14} nP_n = \sum_{n=1}^{14} n \frac{12!\,(n-1)}{(14-n)!\,13^{n-1}} = \frac{121437725363954}{23298085122481} = 5.21 \cdots$$

です。以上より、冊数の期待値は約5.21です。