439回解答　よふかしのつらいおじさん

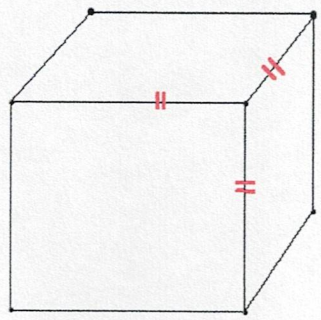
問題1

●x、y、zの対称式なのでzにいえることは、x、yにもいえます。

$$\begin{cases} x+y+z=3 & \cdots \quad (A) \\ xyz=1 & \cdots \quad (B) \end{cases}$$

式をみてわかることは、$z \neq 0$ です。

この式を満たす典型的な例は、各辺の長さが1の立方体です。



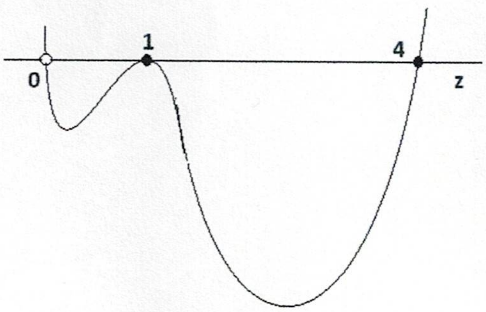
●式(A)より、$y=-x-(z-3)$

これを式(B)に入れると、

$xyz=1 \quad \rightarrow \quad x\big(-x-(z-3)\big)z=1 \quad \rightarrow \quad zx^2+z(z-3)x+1=0$

この式をxの2次方程式と考えると、実数解は、

$D=\big(z(z-3)\big)^2-4z=z^4-6z^3+9z^2-4z=z(z-1)^2(z-4) \geq 0$




つまり、次の場合です。

$z<0,\ z=1,\ z \geq 4$

問題2

●先ず、与えられた式を極形式で表します。

次の式や $x^2+y^2=r^2$ を使います。

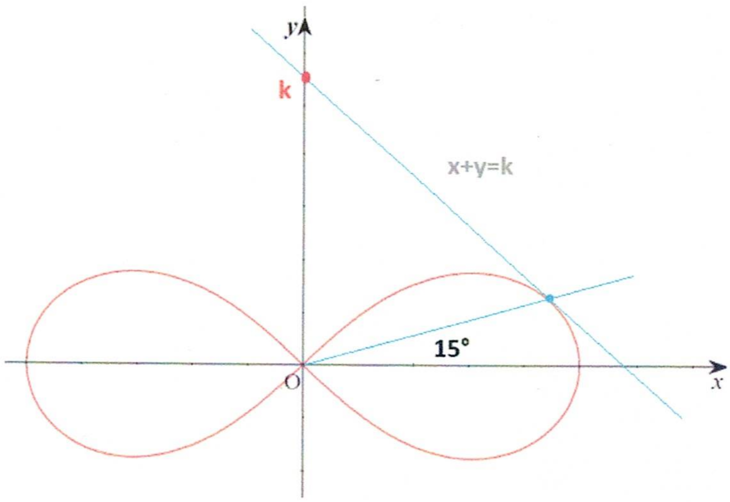
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2 \quad \rightarrow \quad (r^2)^2=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta \quad \rightarrow \quad r^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$\rightarrow\ r^2 = \cos 2\theta\ \ \rightarrow\ \ r = \sqrt{\cos 2\theta}$

ここで、$\cos 2\theta \geq 0$ なので、$0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ で考えます。（図の第一象限）

$x + y$ の最大値を求めるので、与えられた曲線と傾き－1 の直線が接するときの y 切片 k を考えます。




接線の傾きは、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta)}{\frac{d}{d\theta}(r\cos\theta)} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\frac{-\sin 2\theta \times 2}{2\sqrt{\cos 2\theta}} \times \sin\theta + \sqrt{\cos 2\theta} \times \cos\theta}{\frac{-\sin 2\theta \times 2}{2\sqrt{\cos 2\theta}} \times \cos\theta - \sqrt{\cos 2\theta} \times \sin\theta}$$

$$= \frac{-\sin 2\theta\ \sin\theta + \cos 2\theta\ \cos\theta}{-\sin 2\theta\ \cos\theta - \cos 2\theta\ \sin\theta} = -\frac{\cos 2\theta\ \cos\theta - \sin 2\theta\ \sin\theta}{\sin 2\theta\ \cos\theta + \cos 2\theta\ \sin\theta} = -\frac{\cos(2\theta + \theta)}{\sin(2\theta + \theta)} = -\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}$$

この値が、－1 になるように考えると、

$$-\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} = -1\ \ \rightarrow\ \ \tan 3\theta = 1\ \ \rightarrow\ \ 3\theta = 45°\ \ \rightarrow\ \ \theta = 15°$$

●tan 15°の値を求めます。

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sin(60° - 45°)}{\cos(60° - 45°)} = \frac{\sin 60°\ \cos 45° - \cos 60°\ \sin 45°}{\cos 60°\ \cos 45° + \sin 60°\ \sin 45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

●接線の接点の座標を求めます。（x >0 とします）

$$\begin{cases}(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\\ y=\tan 15^\circ\, x\end{cases} \rightarrow \left((1+\tan^2 15^\circ)x^2\right)^2=(1-\tan^2 15^\circ)x^2$$

$$\rightarrow (1+\tan^2 15^\circ)^2x^2=1-\tan^2 15^\circ \rightarrow x^2=\frac{1-\tan^2 15^\circ}{(1+\tan^2 15^\circ)^2}$$

$$\rightarrow x=\frac{\sqrt{1-\tan^2 15^\circ}}{1+\tan^2 15^\circ}=\cos^2 15^\circ\sqrt{1-\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}}=\cos 15^\circ\sqrt{\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}=\cos 15^\circ\sqrt{\cos 30^\circ}$$

$$\rightarrow =\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{3}}{4}$$

$$\rightarrow y=\tan 15^\circ\times\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{3}}{4}=(2-\sqrt{3})\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{3}}{4}=\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt[4]{3}}{4}$$

ゆえに、x + y の最大値は、

$$x+y=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{3}}{4}+\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt[4]{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt[4]{3}}{4}=\frac{\sqrt[4]{27}}{2}(\cong 1.1397\cdots)$$

追加問題

問題 1

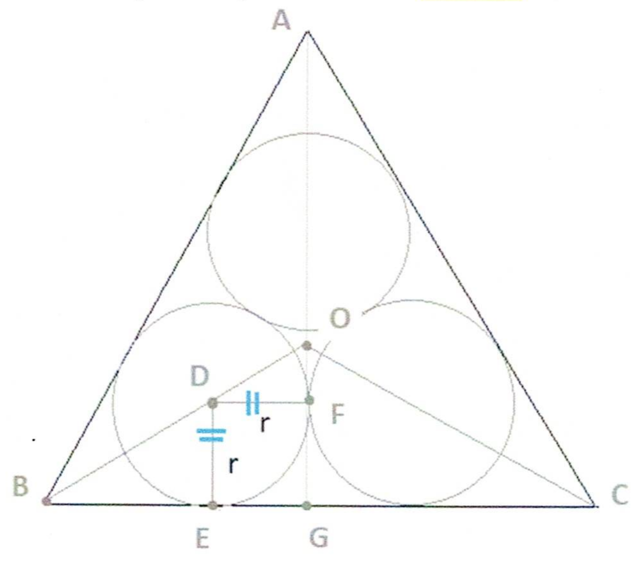
正三角形 ABC の 1 辺の長さが 1 なので、直角三角形 OBG は $BG=\frac{1}{2}$, $OG=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ です。

また、△OBG∽△ODF∽△DBE の関係があります。

内接円の半径を r とすると、$BE=\sqrt{3}r$ なので、

$$BE+DF=BE+EG=\sqrt{3}r+r=(\sqrt{3}+1)r=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow r=\frac{1}{2(\sqrt{3}+1)}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}(\cong 0.1830\cdots)$$



問題 2

●1 冊だけ買っても記念品はもらえないので、2 冊以上から考えます。

役が 1 ペアだけなので、カードを数字だけ見て 13 種類とします。

n 冊目で 1 ペアが揃うとは、それまでは揃わないということです。

それまでのカードがすべて異なります。

13 冊目までは揃わないことがありますが、14 冊目では必ず揃います。

n 冊目で 1 ペアが揃うときの表

| 冊数 | 2 | 3 | 4 | ・・・ | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 揃う確率 | p2 | p3 | p4 | ・・・ | p12 | p13 | p14 |
| まだ揃わない確率 | q2 | q3 | q4 | ・・・ | q12 | q13 | |
| 関係 | p2+q2=1<br>p2=1/13<br>q2=12/13 | p3+q3=q2<br>p3=q2×2/13<br>q3=q2×11/13 | p4+q4=q2<br>p4=q3×3/13<br>q4=q3×10/13 | ・・・ | p12+q12=q2<br>p12=q11×11/13<br>q12=q11×2/13 | p13+q13=q2<br>p13=q12×12/13<br>q13=q12×1/13 | p14=q13×13/13 |

●期待値 E の計算なので、

$$E=\sum_{k=2}^{14} k\times pk = 2\times\frac{1}{13}+3\times\left(\frac{12}{13}\right)\times\frac{2}{13}+4\times\left(\frac{12}{13}\times\frac{11}{13}\right)\times\frac{3}{13}+\cdots$$

$$+12\times\left(\frac{12}{13}\times\frac{11}{13}\times\cdots\times\frac{3}{13}\right)\times\frac{11}{13}+13\times\left(\frac{12}{13}\times\frac{11}{13}\times\cdots\times\frac{2}{13}\right)\times\frac{12}{13}+14\times\left(\frac{12}{13}\times\frac{11}{13}\times\cdots\times\frac{1}{13}\right)\times\frac{13}{13}$$

この計算をするのですが、うまい工夫を思いつかないので、電卓で計算すると、

$$E=\sum_{k=2}^{14} k\times pk$$

$= 0.153846\cdots + 0.426035\cdots + 0.720983\cdots + 0.924337\cdots + 0.959888\cdots$

$+0.826981\cdots + 0.593730\cdots + 0.352323\cdots + 0.169386\cdots + 0.063700\cdots$

$+0.017640\cdots + 0.003207\cdots + 0.000287\cdots = 5.212347\cdots$