● 問題 439 解答＜三角定規＞

［問題１］ $x+y+z=3,\ xyz=1$ …①

①より　$x+y=3-z,\ xy=\dfrac{1}{z}$ …①′

①′より，x, y は２次方程式　$t^2-(3-z)t+\dfrac{1}{z}=0$ …②　の２実解で

$$D=(3-z)^2-\frac{4}{z}=\frac{1}{z}(z^3-6z^2+9z-4)=\frac{1}{z}(z-1)^2(z-4)\geqq 0\quad\therefore\ z\leqq 0,\ z=1,\ 4\leqq z$$

①より　$z\neq 0$ だから，求める　z の値の範囲は　$\boldsymbol{z<0,\ z=1,\ z\geqq 4}$　…[答]

［問題２］

$x>0,\ y>0,\ (x^2+y^2)^2=x^2-y^2$　…①

$r>0$ とし，$x=r\cos\dfrac{\theta}{2},\ y=r\sin\dfrac{\theta}{2}$ と置くと，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4}$ …② で

$x^2+y^2=r^2,\ x^2-y^2=r^2\left(\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)=r^2\cos\theta$　だから①に代入し

$r^4=r^2\cos\theta\quad\therefore\ r^2=\cos\theta$　…③

このとき

$$k^2=(x+y)^2=r^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2=r^2(1+\sin\theta)=\cos\theta(1+\sin\theta)\quad\cdots④\ (\because ③)$$

$$\therefore\ \frac{dk^2}{d\theta}=-\sin\theta(1+\sin\theta)+\cos^2\theta=-(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)$$

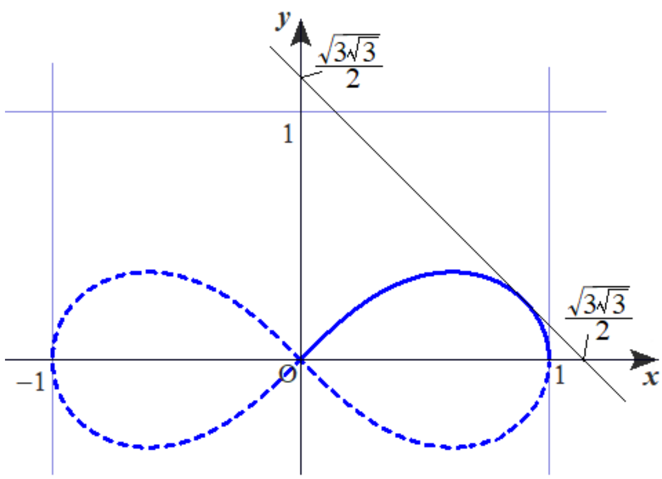
よって　$\sin\theta\leqq\dfrac{1}{2}$　のとき　$\dfrac{dk^2}{d\theta}\geqq 0,\ \dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta$　のとき　$\dfrac{dk^2}{d\theta}\leqq 0$ だから

k^2 は $\sin\theta=\dfrac{1}{2},\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　のとき最大値 $k^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。

以上より，求める　$k=x+y$ の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}}$　…[答]　$(=1.139\cdots)$

最大値を与える x, y は，

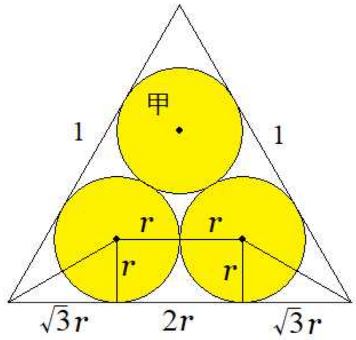
$$x=\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}}}{4}=0.898\cdots,$$
$$y=\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{3}}}{4}=0.101\cdots$$



《追加問題》

［問題１］

甲円の半径を r とすると, 右図のようになるから



$$2(\sqrt{3}+1)r=1 \quad \therefore\ r=\frac{1}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad \cdots[答]$$

［問題２］

本を n 冊購入する場合の確率を $p(n)$ とすると

(ｉ) $n=2$ のとき

2 回目に 1 回目と同じ数字が出れば良いのだから, $p(2)=\dfrac{1}{13}=\dfrac{1}{13^{2-1}}\cdot\dfrac{12!}{(14-2)!}\cdot(2-1)$

(ⅱ) $n=3$ のとき

2 回目に 1 回目と異なる数が出て, 3 回目に 1, 2 回目と同じ数が出るのだから,

$$p(3)=\frac{12}{13}\cdot\frac{2}{13}=\frac{1}{13^{3-1}}\cdot\frac{12!}{(14-3)!}\cdot(3-1)$$

(ⅲ) $n=4$ のとき

1, 2, 3 回に異なる数が出て, 4 回目に 1, 2, 3 回目のどれかと同じ数が出るのだから

$$p(4)=\frac{12}{13}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{3}{13}=\frac{1}{13^{4-1}}\cdot\frac{12!}{(14-4)!}\cdot(4-1)$$

(ⅳ) 同様に考えて n 冊購入のとき, $p(n)=\dfrac{1}{13^{n-1}}\cdot\dfrac{12!}{(14-n)!}\cdot(n-1)$

以上より, 購入する本の冊数の期待値は

$$\sum_{n=2}^{14} np(n)=\sum_{n=2}^{14}\frac{12!\cdot n(n-1)}{13^{n-1}\cdot(14-n)!}=\cdots=\frac{\mathbf{121{,}437{,}725{,}363{,}954}}{\mathbf{23{,}298{,}085{,}122{,}481}}=5.212\cdots \quad \cdots[答]$$

（ 計算は WolframAlpha にやってもらいました ）