第 440 回

問題 1　多項式 $(x^2+x+1)^{n+1}$ を展開したときの x^3 の係数を P_n とする。

次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}P_k$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P_k}$

解答

(1)　多項式 $(x^2+x+1)^{n+1}$ を展開したときの一般項は，$p,\ q,\ r$ を非負整数として，

$\dfrac{(n+1)!}{p!q!r!}(x^2)^p x^q 1^r=\dfrac{(n+1)!}{p!q!r!}x^{2p+q}$　$(p+q+r=n+1)$ と表される。

$2p+q=3$ とおくと，$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ ,n-2)$，$(1,\ 1,\ n-1)$ であるから，

$P_n=\dfrac{(n+1)!}{0!3!(n-2)!}+\dfrac{(n+1)!}{1!1!(n-1)!}=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+5)$ より，

$$\sum_{k=1}^{n}P_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+7)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}P_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+7)=\frac{1}{24}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{7}{n}\right)=\frac{1}{24}$　**答**

(2)　$\dfrac{1}{P_k}=\dfrac{6}{k(k+1)(k+5)}=\dfrac{6}{5k}-\dfrac{3}{2(k+1)}+\dfrac{3}{10(n+5)}=\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)-\dfrac{3}{10}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+5}\right)$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P_k}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{6}{5}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)\right\}$$

$$=\frac{6}{5}-\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{163}{200}$$　**答**

補足　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P_k}=\frac{n(163n^4+2445n^3+13215n^2+30675n+25462)}{200(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$

問題 2　（防衛医科大学校の類題）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!}}$ の値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!}}=\sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{n^n}}=\sqrt[n]{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(2+\dfrac{n}{n}\right)}$ とおく。

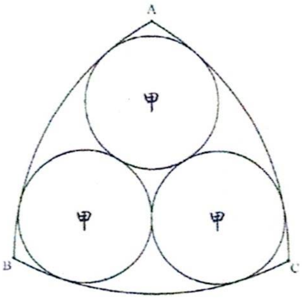
両辺の自然対数をとると，$\log x=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log x=\int_0^1\log(2+x)dx=[(2+x)\log(2+x)]_0^1-\int_0^1(2+x)\cdot\frac{1}{2+x}dx=3\log3-2\log2-1$ より，

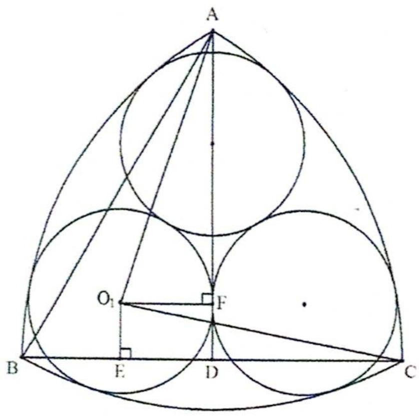
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x=e^{3\log3-2\log2-1}=\frac{27}{4e}$　**答**

追加問題１

A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC，弧 CA，弧 AB は半径１の円弧である。
弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に
互いに接する甲円３個を内接させる。
甲円の半径を求めよ。



解答　左下側の甲円を $O_1(r_1)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle ABD$ について，$AB=1$，$\angle ABD=60°$ より，$AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle AO_1F$ について，$AO_1=1-r_1$，$O_1F=r_1$ であるから，

三平方の定理により，$AF=\sqrt{(1-r_1)^2-r_1{}^2}=\sqrt{1-2r_1}$

$\triangle O_1EC$ について，

$O_1E=AD-AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{1-2r_1}$，$EC=r_1+\dfrac{1}{2}$，$CO_1=1-r_1$

であるから，

三平方の定理により，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{1-2r_1}\right)^2+\left(r_1+\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-r_1)^2$

展開して移項すると，$1+r_1=\sqrt{3}\sqrt{1-2r_1}$

両辺を２乗して整理すると，$r_1{}^2+8r_1-2=0$　　$r_1=-4\pm3\sqrt{2}$

$r_1>0$ より，$r_1=-4+3\sqrt{2}$（$\fallingdotseq 0.242641$）

よって，甲円の半径は，$-4+3\sqrt{2}$　答

追加問題２

６マス目が上りのすごろくがある。
サイコロを振って，出た目の数だけ進む。
上りを越える数が出たら上りに到達とする。
上りに達するまでにサイコロを振る回数の期待値を求めよ。

0	1	2	3	4	5	6
振り出し						上り

解答　残り n マスのときの上りまでの回数の期待値を E_n とおく。

残り１マス（次のマスが上り）のときは，次は必ず上りとなるから，$E_1=1$

残り２マスのときは，サイコロの目が $\dfrac{1}{6}$ の確率で１が出て，$\dfrac{5}{6}$ の確率で２以上の目が出る。

目が１のときは，その１振り＋ E_1 が必要で，目が２以上のときはその１振りで上りとなる。

従って，$E_2=\dfrac{1}{6}(1+E_1)+\dfrac{5}{6}\cdot1=1+\dfrac{1}{6}E_1=\dfrac{7}{6}$

以下同様に，

$E_3 = \frac{1}{6}(1+E_2) + \frac{1}{6}(1+E_1) + \frac{4}{6}\cdot 1 = 1 + \frac{1}{6}(E_1+E_2) = \frac{7^2}{6^2}$

$E_4 = 1 + \frac{1}{6}(E_1+E_2+E_3) = \frac{7^3}{6^3}$

$E_5 = 1 + \frac{1}{6}(E_1+E_2+E_3+E_4) = \frac{7^4}{6^4}$

$E_6 = 1 + \frac{1}{6}(E_1+E_2+E_3+E_4+E_5) = \frac{7^5}{6^5}$ （≒ 2.16） 答

別解　n 回目に上りになる確率を p_n とおくと，求める期待値Eは，E$= p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6$

サイコロの目を a, b, c, … で表す。

（1回目で上り）6の目が出たときであるから,，$p_1 = \frac{1}{6}$

（2回目で上り）　1回目 a，2回目 b とすると，$1 \leqq a \leqq 5$，$a+b \geqq 6$ となる $(a,\ b)$ の組は，
$a=1$ のとき，2通り，$a=2$ のとき，3通り，$a=3$ のとき，4通り，$a=4$ のとき，5通り，$a=5$ のとき，6通り
であるから，$2+3+4+5+6=20$ 通り。$\therefore p_2 = \frac{20}{6^2}$

（3回目で上り）　1回目 a，2回目 b，3回目 c とすると，$1 \leqq a+b \leqq 5$，$a+b+c \geqq 6$ となる $(a,\ b,\ c)$ の組は，
a, b の目 $\{1,\ 1\}$ のとき，$c \geqq 4$ より，3通り
a, b の目 $\{1,\ 2\}$ のとき，$c \geqq 3$ より，4通り　$\therefore 2! \times 4 = 8$ 通り
a, b の目 $\{1,\ 3\}$ のとき，$c \geqq 2$ より，5通り　$\therefore 2! \times 5 = 10$ 通り
a, b の目 $\{2,\ 2\}$ のとき，$c \geqq 2$ より，5通り
a, b の目 $\{1,\ 4\}$ のとき，$c \geqq 1$ より，6通り　$\therefore 2! \times 6 = 12$ 通り
a, b の目 $\{2,\ 3\}$ のとき，$c \geqq 1$ より，6通り　$\therefore 2! \times 6 = 12$ 通り
であるから，$3+8+10+5+12+12=50$ 通り。　$\therefore p_3 = \frac{50}{6^3}$

（4回目で上り）　1回目 a，2回目 b，3回目 c，4回目 d とすると，$1 \leqq a+b+c \leqq 5$，$a+b+c+d \geqq 6$ となる $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，
a, b, c の目 $\{1,\ 1,\ 1\}$ のとき，$d \geqq 3$ より，4通り
a, b, c の目 $\{1,\ 1,\ 2\}$ のとき，$d \geqq 2$ より，5通り　$\therefore 3 \times 5 = 15$ 通り
a, b, c の目 $\{1,\ 1,\ 3\}$ のとき，$d \geqq 1$ より，6通り　$\therefore 3 \times 6 = 18$ 通り
a, b, c の目 $\{1,\ 2,\ 2\}$ のとき，$d \geqq 1$ より，6通り　$\therefore 3 \times 6 = 18$ 通り
であるから，$4+15+18+18=55$ 通り。　$\therefore p_3 = \frac{55}{6^4}$

（5回目で上り）　1回目 a，2回目 b，3回目 c，4回目 d，5回目 e とすると，$1 \leqq a+b+c+d \leqq 5$，
$a+b+c+d+e \geqq 6$ となる $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$ の組は，
a, b, c, d の目 $\{1,\ 1,\ 1,\ 1\}$ のとき，$e \geqq 2$ より，5通り
a, b, c, d の目 $\{1,\ 1,\ 1,\ 2\}$ のとき，$e \geqq 1$ より，6通り　$\therefore 4 \times 6 = 24$ 通り
であるから，$5+24=29$ 通り。　$\therefore p_3 = \frac{29}{6^5}$

（6回目で上り）　1回目 a，2回目 b，3回目 c，4回目 d，5回目 e，6回目 f とすると，
$1 \leqq a+b+c+d+e \leqq 5$，$a+b+c+d+e+f \geqq 6$ となる $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$ の組は，
a, b, c, d, e の目 $\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\}$ のとき，$f \geqq 1$ より，6通りであるから，$\therefore p_6 = \frac{6}{6^6} = \frac{1}{6^5}$

よって,

$$E=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{20}{6^2}+3\cdot\frac{50}{6^3}+4\cdot\frac{55}{6^4}+5\cdot\frac{29}{6^5}+6\cdot\frac{1}{6^5}=\frac{6+40+25}{6^2}+\frac{220\cdot6+145+6}{6^5}=\frac{71}{6^2}+\frac{1471}{6^5}$$

$$=\frac{16807}{6^5}=\frac{16807}{7776}\ (\fallingdotseq 2.16)$$ 答

補足 $E=\left(\frac{7}{6}\right)^5$

(2024/3/31　ジョーカー)