問題1 $(a+b+c)^n$を展開したとき、$a^p b^q c^r$の係数は$\frac{n!}{p!q!r!}$なので、$(x^2+x+1)^{n+1}$の一般項は、

$$\frac{(n+1)!}{p!\,q!\,r!}(x^2)^p x^q 1^r = \frac{(n+1)!}{p!\,q!\,r!}x^{2p+q}$$

です。x^3の項は$2p+q=3$のときなので、考えられる組み合わせは、

$$(p,q)=(0,3),(1,1)$$

です。ここで、$p+q+r=n+1$なので、

$$(p,q,r)=(0,3,n-2),(1,1,n-1)$$

です。よって、x^3の係数P_kは、

$$P_k=\frac{(k+1)!}{0!\,3!\,(k-2)!}+\frac{(k+1)!}{1!\,1!\,(k-1)!}=\frac{k(k+1)(k+5)}{6}$$

となります。この結果を踏まえて、設問を解きます。

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}P_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+5)}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\frac{n(n+1)(n+2)(n+7)}{24}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{7}{n}\right)}{24}=\frac{1}{24}$$

(2) $\frac{1}{P_k}$を部分分数に分けます。

$$\frac{1}{P_k}=\frac{6}{k(k+1)(k+5)}$$

$$=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{k(k+1)}-\frac{3}{10}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\frac{1}{(k+3)(k+4)}+\frac{1}{(k+4)(k+5)}\right)$$

$$=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{3}{10}\left\{\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)+\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)+\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)\right\}$$

すると、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P_k}=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{3}{10}\left\{\left(\frac{1}{1+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{1+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{1+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\left(\frac{1}{1+4}-\frac{1}{n+5}\right)\right\}$$

$$=\frac{163n^5+2445n^4+13255n^3+30675n^2+25462n}{200n^5+3000n^4+17000n^3+45000n^2+54800n+24000}$$

なので、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{163+\frac{2445}{n}+\frac{13255}{n^2}+\frac{30675}{n^3}+\frac{25462}{n^4}}{200+\frac{3000}{n}+\frac{17000}{n^2}+\frac{45000}{n^3}+\frac{54800}{n^4}+\frac{24000}{n^4}}=\frac{163}{200}$$

問題2　与式の対数をとって、定積分の問題に帰着させました。

$$\log\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!}}=\frac{\log(3n)!-\log(2n)!}{n}-\log n$$

$$=\frac{\log(2n+1)+\log(2n+2)+\cdots+\log(3n)}{n}-\frac{n\log n}{n}$$

$$=\frac{\{\log(2n+1)-\log n\}+\{\log(2n+2)-\log n\}+\cdots+\{\log(3n)-\log n\}}{n}$$

$$=\frac{\log\left(2+\frac{1}{n}\right)+\log\left(2+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(2+\frac{n}{n}\right)}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)$$

となるので、次の通り定積分で表現できます。

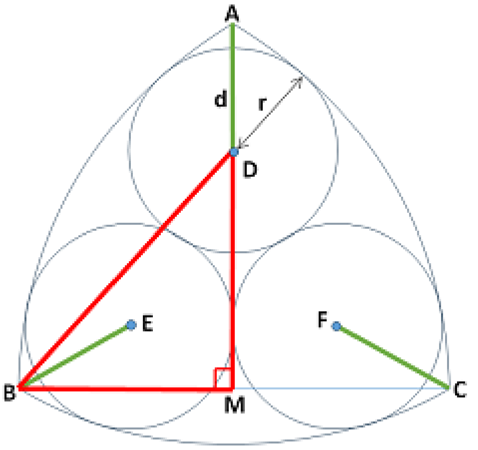
$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(2+x)\,dx=3\log 3-2\log 2-1$$

以上より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!}}=e^{3\log 3-2\log 2-1}=\frac{27}{4e}$$

です。

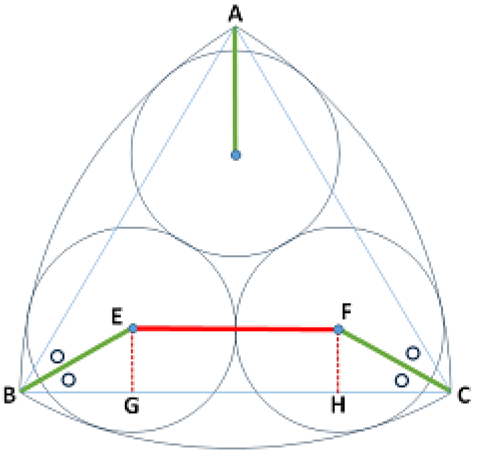
追加問題1



左図のように、円の中心をD、E、F、半径をrとします。
三角形の頂点A、B、CとD、E、Fに緑の線分を引きます。
図形の対称性から、その線分の長さは等しく、$\mathrm{AD} = \mathrm{BE} = \mathrm{CF} = \mathrm{d}$とします。また、BCの中点Mをとって、赤の直角三角形BDMに三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{BM}^2 + \mathrm{DM}^2 = \mathrm{BD}^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{d}\right)^2 = (1 - \mathrm{r})^2 \cdots ①$$



次に、BE、CFは角B、Cの二等分線で、$\angle \mathrm{EBG} = \angle \mathrm{FCH} = 30°$ですから、

$$\mathrm{BG} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}、\mathrm{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{CF} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}$$

です。すると、

$$\mathrm{BG} + \mathrm{GH} + \mathrm{CH} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d} + 2\mathrm{r} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d} = 1 \cdots ②$$

です。

①②を解くと、

$$r = \pm 3\sqrt{2} - 4、d = \sqrt{3}(3 \mp \sqrt{2})$$

となります。$r > 0$なので、$r = 3\sqrt{2} - 4$が適切です。
以上より、甲円の半径は$3\sqrt{2} - 4$です。

追加問題2 よい考えが浮かばなかったので、上がりに達するまでのサイコロの目の出方を調べました（参考までに、数え上げ表を最終ページに記載しておきます）。サイコロを振る回数nと場合数S_nは以下の通りです。

n	S_n
1	1
2	20
3	50
4	55
5	29
6	6

サイコロを振る回数の期待値をEとすると、

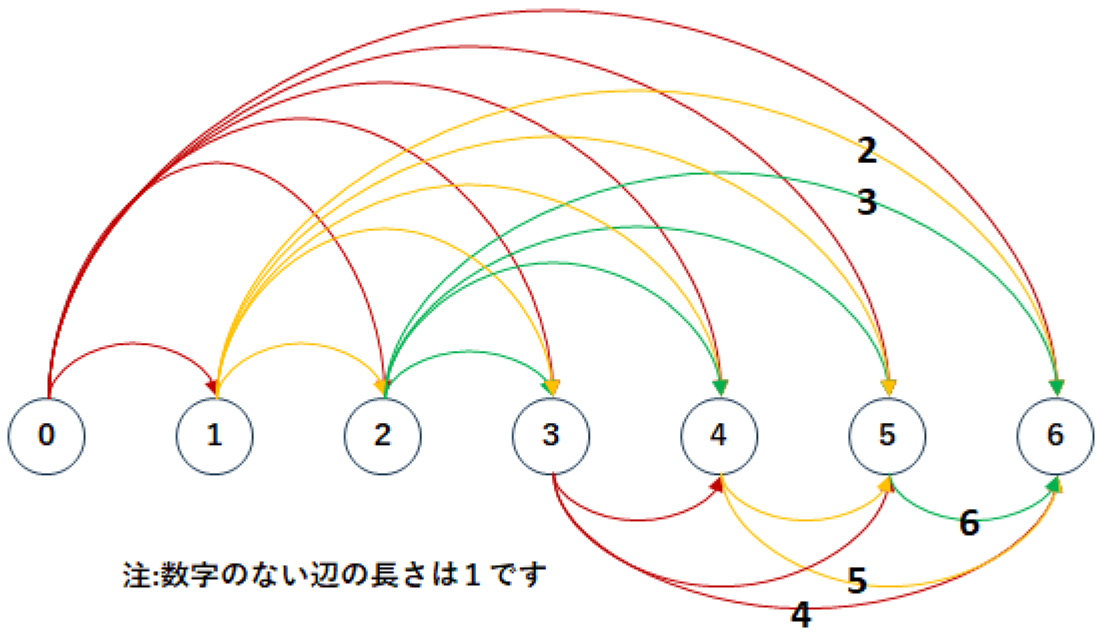
$$E = \sum_{n=1}^{6} n\left(\frac{1}{6}\right)^{n} S_n \cdots ①$$

$$= 1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\cdot 1 + 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\cdot 20 + 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\cdot 50 + 4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\cdot 55 + 5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{5}\cdot 29 + 6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\cdot 1$$

$$= \frac{16807}{7776}$$

以上より、求める期待値は$\frac{16807}{7776} \approx 2.16$です。

追加問題2 別解 マス目が少ないので、全ケースを樹形図にして数え上げるのが、手っ取り早くてわかりやすいのですが、別の解法も考えてみました。マス目を頂点、サイコロの目を辺と見れば、すごろくの状態遷移を次のようなグラフで表すことができます。



これを接続行列Aで表すと、次のようになります。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&1&\color{red}{1}\\0&0&1&1&1&1&2\\0&0&0&1&1&1&3\\0&0&0&0&1&1&4\\0&0&0&0&0&1&5\\0&0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

行が開始頂点、列が終了頂点です。

赤で示した要素は、頂点⓪⇒頂点⑥に到達するケース数を表します。

n回サイコロを振ったときは、A^nを計算すれば求まります。やってみると、以下のような遷移を経て、⑥に至るようです。

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&2&3&4&\mathbf{\color{red}{20}}\\0&0&0&1&2&3&18\\0&0&0&0&1&2&15\\0&0&0&0&0&1&11\\0&0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1&3&6&\mathbf{\color{red}{50}}\\0&0&0&0&1&3&32\\0&0&0&0&0&1&17\\0&0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&4&\mathbf{\color{red}{55}}\\0&0&0&0&0&1&23\\0&0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^5=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&\mathbf{\color{red}{29}}\\0&0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad A^6=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&\mathbf{\color{red}{6}}\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

上記の赤で示したケース数を前ページの①式に代入すれば、期待値が求まります。

上がりに達するまでの数え上げ

n	1	2	3	4	5	6	ケース数
1	6	—	—	—	—	—	1

n	1	2	3	4	5	6	ケース数
2	1	5	—	—	—	—	20
		6					
	2	4					
		5					
		6					
	3	3					
		4					
		5					
		6					
	4	2					
		3					
		4					
		5					
		6					
	5	1					
		2					
		3					
		4					
		5					
		6					

n	1	2	3	4	5	6	ケース数
3	1	1	4	—	—	—	50
			5				
			6				
		2	3				
			4				
			5				
			6				
		3	2				
			3				
			4				
			5				
			6				
		4	1				
			2				
			3				
			4				
			5				
			6				
	2	1	3				
			4				
			5				
			6				
		2	2				
			3				
			4				
			5				
			6				
		3	1				
			2				
			3				
			4				
			5				
			6				
	3	1	2				
			3				
			4				
			5				
			6				
		2	1				
			2				
			3				
			4				
			5				
			6				
	4	1	1				
			2				
			3				
			4				
			5				
			6				

n	1	2	3	4	5	6	ケース数
4	1	1	1	3	—	—	55
				4			
				5			
				6			
			2	2			
				3			
				4			
				5			
				6			
			3	1			
				2			
				3			
				4			
				5			
				6			
		2	1	2			
				3			
				4			
				5			
				6			
			2	1			
				2			
				3			
				4			
				5			
				6			
		3	1	1			
				2			
				3			
				4			
				5			
				6			
	2	1	1	2			
				3			
				4			
				5			
				6			
			2	1			
				2			
				3			
				4			
				5			
				6			
		2	1	1			
				2			
				3			
				4			
				5			
				6			
	3	1	1	1			
				2			
				3			
				4			
				5			
				6			

n	1	2	3	4	5	6	ケース数
5	1	1	1	1	2	—	29
					3		
					4		
					5		
					6		
				2	1		
					2		
					3		
					4		
					5		
					6		
			2	1	1		
					2		
					3		
					4		
					5		
					6		
		2	1	1	1		
					2		
					3		
					4		
					5		
					6		
	2	1	1	1	1		
					2		
					3		
					4		
					5		
					6		

n	1	2	3	4	5	6	ケース数
6	1	1	1	1	1	1	6
						2	
						3	
						4	
						5	
						6	