第 441 回

問題　2024 年の防衛医科大学の類題

(1)　$\dfrac{\tan 10^\circ \tan 30^\circ}{\tan 20^\circ \tan 40^\circ}$ の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{\tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 70^\circ}{\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ}$ の値を求めよ。

解答

補題　$\tan 3\theta = \tan\theta \tan(60^\circ+\theta)\tan(60^\circ-\theta)$

証明　左辺$= \tan(2\theta+\theta) = \dfrac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1-\tan 2\theta \tan\theta} = \dfrac{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}+\tan\theta}{1-\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot\tan\theta} = \dfrac{\tan\theta(3-\tan^2\theta)}{1-3\tan^2\theta}$

$= \tan\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\tan\theta}{1-\sqrt{3}\tan\theta}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta} = \tan\theta\cdot\dfrac{\tan 60^\circ+\tan\theta}{1-\tan 60^\circ\tan\theta}\cdot\dfrac{\tan 60^\circ-\tan\theta}{1+\tan 60^\circ\tan\theta}$

$= \tan\theta\tan(60^\circ+\theta)\tan(60^\circ-\theta)$ =右辺

よって，$\tan 3\theta = \tan\theta\tan(60^\circ+\theta)\tan(60^\circ-\theta)$　終

(1)　補題で，$\theta=10^\circ$ とすると，

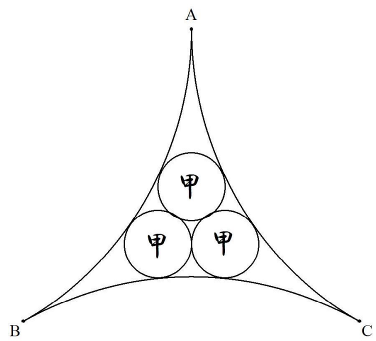
$\tan 30^\circ = \tan 10^\circ \tan 70^\circ \tan 50^\circ = \tan 10^\circ\cdot\dfrac{1}{\tan 20^\circ}\cdot\dfrac{1}{\tan 40^\circ} = \dfrac{\tan 10^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，$\dfrac{\tan 10^\circ\tan 30^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ} = \dfrac{\tan 10^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ}\cdot\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$　答

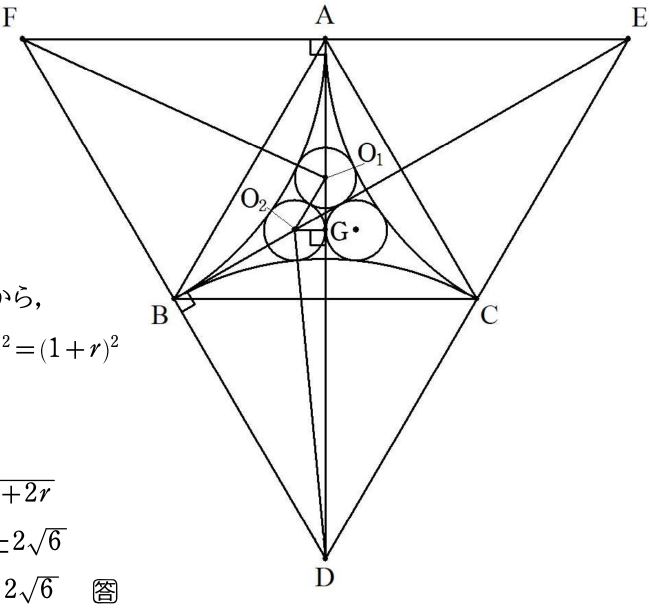
(2)　$\dfrac{\tan 10^\circ\tan 50^\circ\tan 70^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ\tan 80^\circ} = \dfrac{\tan 10^\circ\cdot\dfrac{1}{\tan 40^\circ}\cdot\dfrac{1}{\tan 20^\circ}}{\tan {}^\circ 20^\circ\tan 40^\circ\cdot\dfrac{1}{\tan 10^\circ}} = \left(\dfrac{\tan 10^\circ}{\tan 20^\circ\tan 40^\circ}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$　答

追加問題 1

A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，
弧 BC，弧 CA，弧 AB は半径 1 の円弧である。
弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に
互いに接する甲円 3 個を内接させる。
甲円の半径を求めよ。



解答　甲円の半径を r とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_1O_2G$ に三平方の定理を適用すると，

$O_1G=\sqrt{(2r)^2-r^2}=\sqrt{3}\,r$

$\triangle O_2DG$ に三平方の定理を適用すると，

$GD=\sqrt{(1+r)^2-r^2}=\sqrt{1+2r}$

$\triangle O_1AF$ について，

$AO_1=AD-O_1G-GD=\sqrt{3}-\sqrt{3}\,r-\sqrt{1+2r}$ であるから，

三平方の定理を適用すると，$(\sqrt{3}-\sqrt{3}\,r-\sqrt{1+2r})^2+1^2=(1+r)^2$

整理すると，$2-3r+r^2=\sqrt{3}(1-r)\sqrt{1+2r}$

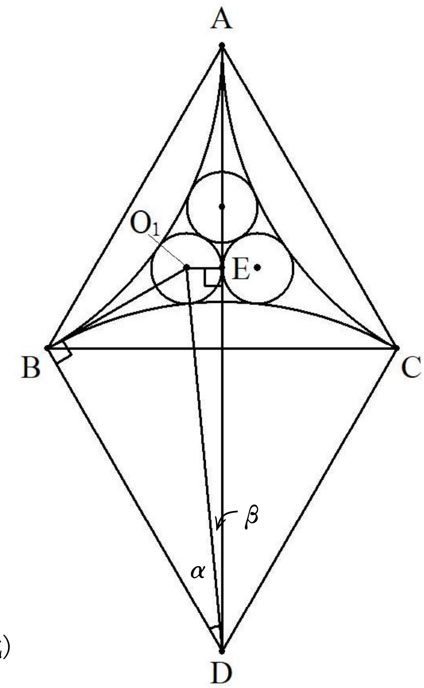
$(1-r)(2-r)=\sqrt{3}(1-r)\sqrt{1+2r}$

$r\fallingdotseq 1$ であるから，両辺を $1-r$ で割ると，$2-r=\sqrt{3}\sqrt{1+2r}$

両辺を 2 乗して，整理すると，$r^2-10r+1=0$　$r=5\pm2\sqrt{6}$

$r<1$ より，$r=5-2\sqrt{6}$　よって，甲円の半径は，$5-2\sqrt{6}$　答

別解　左下側の甲円を $O_1\,(r_1)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\angle O_1DB=\alpha$，$\angle O_1DE=\beta$ とおくと，

$\cos\alpha=\dfrac{1}{1+r_1}$，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{(1+r_1)^2-r_1{}^2}}{1+r_1}=\dfrac{\sqrt{1+2r_1}}{1+r_1}$，

$\alpha+\beta=30^\circ$ より，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

移項して，$\cos\alpha\cos\beta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\alpha\sin\beta$

両辺を2乗すると，$\left(\cos\alpha\cos\beta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$

整理すると，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{4}$

$$\left(\frac{1}{1+r_1}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1+2r_1}}{1+r_1}\right)^2-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{1+r_1}\cdot\frac{\sqrt{1+2r_1}}{1+r_1}=\frac{1}{4}$$

両辺に $4(1+r_1)^2$ を掛けて，移項すると，$7+6r_1-r_1{}^2=4\sqrt{3}\sqrt{1+2r_1}$

両辺を 2 乗して，整理すると，$r_1{}^4-12r_1{}^3+22r_1{}^2-12r_1+1=0$（相反方程式）

左辺を因数分解すると，$\left(r_1+\dfrac{1}{r_1}-2\right)\left(r_1+\dfrac{1}{r_1}-10\right)=0$　$(r_1-1)^2(r_1{}^2-10r_1+1)=0$

$0<r_1<\dfrac{1}{4}$ より，$r_1=5-2\sqrt{6}$（$\fallingdotseq 0.101021$）

よって，甲円の半径は，$5-2\sqrt{6}$　答

追加問題 2

歪みのないコインでコイントスを何度も行う。

(1)　表が2回連続して出たらそこで終わりで，投げた回数の合計が得点となる。その得点の期待値を求めよ。

(2)　裏が出たその次に表が出たらそこで終わりで，投げた回数の合計が得点となる。その得点の期待値を求めよ。

解答

(1)　求める期待値を E とする。すなわち，E 投で終わるものとする。

1投目が裏の場合，その1投のあと（開始時と同じ状態なので）さらに E 投が期待できる。

1投目が表の場合，

　2投目が表なら，その2投で終了。

　2投目が裏なら，その2投のあとさらに E 投が期待できる。

よって，$E=\frac{1}{2}(1+E)+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}(2+E)$　$\therefore E=6$　答

(2)　すでに裏が出たあとの状態とし，ここから F 投が期待できるものとする。

次が表なら，その1投で終了。

次が裏なら，この1投のあとにさらに F 投が期待できる。

従って，$F=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}(1+F)$　$\therefore F=2$

さて，ゲームを最初に戻し，求める期待値を E とする。

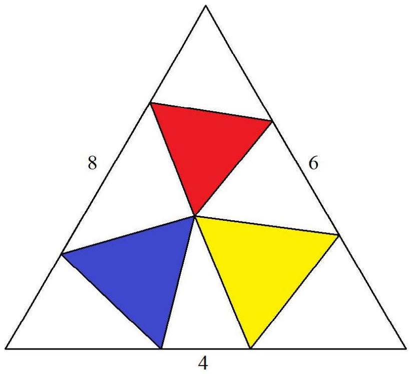
1投目が裏の場合，その1投のあと $F=2$ 投が期待できる。

1投目が表の場合，その1投とあとさらに E 投が期待できる。

よって，$E=\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{2}(1+E)$　$\therefore E=4$　答

追加問題 3

図のように正三角形白内に，
3 個の正三角形赤青黄が内接
している。
4 個の正三角形の 1 辺をすべ
て求めよ。



解答　EF＝p，GH＝q，IJ＝rとおき，図 1 のように記号を付ける。

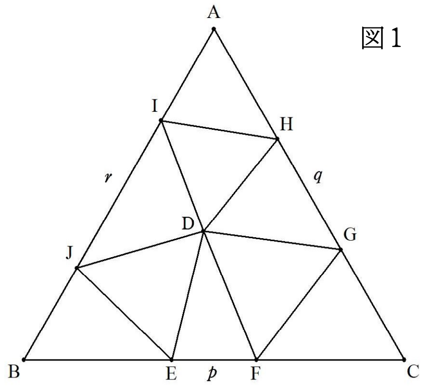


図 1

図 2 で，△AIH について，∠AIH＝180°－(∠IHA＋60°)＝120°－∠IHA
∠AHG＝180° より，∠DHG＝180°－(∠IHA＋60°)＝120°－∠IHA
よって，∠AIH＝∠DHG　同様に，∠AHI＝∠DIJ
次に，△DIJ を D を中心に 60° 回転すると，△DI′E になり，
それをさらに E を中心に 60° 回転すると，△JI″E になる。
同様に，△DGH を D を中心に −60° 回転すると，△DFH′ になり，
それをさらに F を中心に −60° 回転すると，△FH″G になる。
△JI″B を平行移動して JI″ を △GH″C の GH″ に重ねると，
△GH″B′ になる。
このとき，△B′H″C は正三角形になるから，
（∵∠H″CB′＝∠C＝60°，
また，∠GH″F＋∠GH″B′＝∠AIH＋∠IHA＝120° より，
∠B′H″C＝180°−120°＝60°）
I″B＝H″B′＝H″C であるから，
BC＝I″H″＝I″E＋EF＋FH″＝$r+p+q$ ＝ $p+q+r$

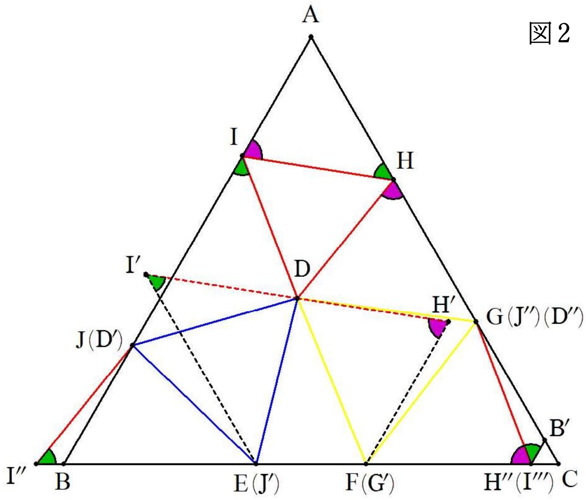


図 2

図 3 で，正三角形 DHI，DJE の 1 辺をそれぞれ x，y とする。
∠DIJ＝∠IHA＝α，同様に，∠DJI＝∠BEJ＝β とおく。
△AIH，△IBE，△DIJ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{AI}{\sin\alpha}=\frac{x}{\sin 60^\circ}\text{，}\quad \frac{y}{\sin 60^\circ}=\frac{JB}{\sin\beta}\text{，}\quad \frac{x}{\sin\beta}=\frac{y}{\sin\alpha}$$

これら 3 式を辺々掛け合わせると，AI＝JB

したがって，AI＝$\frac{1}{2}$(AI＋JB)＝$\frac{1}{2}$(AB−IJ)＝$\frac{1}{2}(p+q+r-r)=\frac{p+q}{2}$

同様に，HA＝$\frac{r+p}{2}$

△AIH に余弦定理を適用すると，

$$IH^2=x^2=\left(\frac{r+p}{2}\right)^2+\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-2\cdot\frac{r+p}{2}\cdot\frac{p+q}{2}\cos 60^\circ$$

$$=\frac{p^2+q^2+r^2+pq-qr+rp}{4}$$

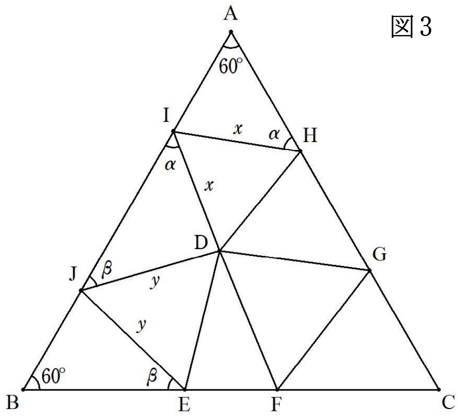
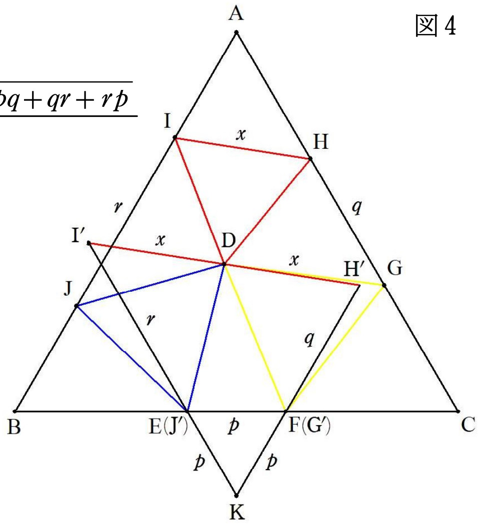


図 3

IH＞0 より，$\mathrm{IH}=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2+r^2+pq-qr+rp}}{2}$

同様に，$\mathrm{EJ}=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2+r^2+pq+qr-rp}}{2}$，$\mathrm{GF}=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2+r^2-pq+qr+rp}}{2}$

図 4



IH を求める別解（図 4 ）

△DIJ を D を中心に 60° 回転すると，△DI′E になり，△DGH を D を中心に −60° 回転すると，△DFH′ になる。

I′E と H′F の交点を K とすると，∠I′KH′＝60° より，

△KFE は正三角形となる。

△KH′I′について，KH′＝ $p+q$，KI′＝ $p+r$，H′I′＝ $2x$ より，

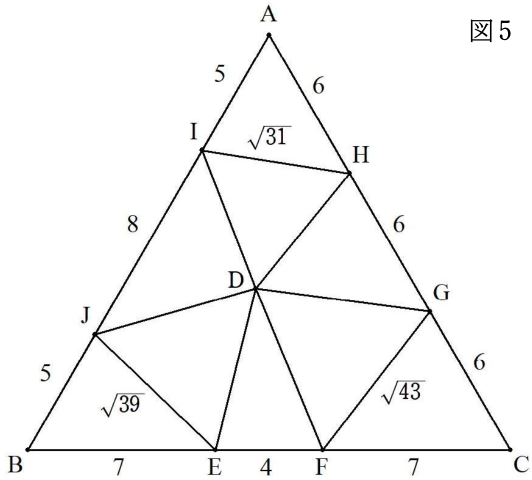
余弦定理を適用すると，

$$(2x)^2=(p+q)^2+(p+r)^2-2(p+q)(p+r)\cos 60^\circ$$

$$=(p+q)^2+(p+r)^2-2(p+q)(p+r)\cdot\frac{1}{2}=p^2+q^2+r^2+pq-qr+rp$$

$x>0$ より，$x=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2+r^2+pq-qr+rp}}{2}=\mathrm{IH}$

図 5



本題に戻ろう。

$p=4$，$q=6$，$r=8$ のとき（図 5 ），

BC＝ $p+q+r=18$，

$\mathrm{IH}=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2+r^2+pq-qr+rp}}{2}=\sqrt{31}$，

$\mathrm{EJ}=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2+r^2+pq+qr-rp}}{2}=\sqrt{39}$，

$\mathrm{GF}=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2+r^2-pq+qr+rp}}{2}=\sqrt{43}$

よって，正三角形白赤青黄の 1 辺は，白：18，赤：$\sqrt{31}$，青：$\sqrt{39}$，黄：$\sqrt{43}$ 答

（2024/4/28　ジョーカー）