問題1(1) よい考えが浮かばなかったので、三角関数の和⇔積の公式を使って、単純に計算しました。まず、tanをsin、cosに変換して、

$$与式 = \frac{\sin(10°)\cos(20°)\sin(30°)\cos(40°)}{\cos(10°)\sin(20°)\cos(30°)\sin(40°)}$$

です。次に積⇒和に変換します。まずは分子から、

$$\begin{aligned}
分子 &= \frac{\cos(20°)-\cos(40°)}{2}\cdot\frac{\cos(60°)+\cos(20°)}{2} \\
&= \frac{-\cos(40°)\cos(60°)+\cos(20°)\cos(60°)-\cos(20°)\cos(40°)+\cos(20°)^2}{4} \\
&= \frac{\frac{-\cos(10°)-\cos(20°)}{2}+\frac{\cos(80°)+\cos(40°)}{2}-\frac{\cos(60°)+\cos(20°)}{2}+\frac{\cos(40°)+1}{2}}{4} \\
&= \frac{-\cos(10°)+\cos(80°)-\cos(60°)+2\cos(40°)-2\cos(20°)+1}{8}
\end{aligned}$$

今度は、求めることが容易な角度を意識して、和⇒積に変換すると、

$$\begin{aligned}
上式 &= \frac{2\sin(10°)\sin(90°)-\cos(60°)-4\sin(10°)\sin(30°)+1}{8} \\
&= \frac{2\sin(10°)\{\sin(90°)-2\sin(30°)\}-\cos(60°)+1}{8} \\
&= \frac{2\sin(10°)\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+1}{8} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

です。分母も同様にして、

$$\begin{aligned}
分母 &= \frac{\cos(20°)-\cos(60°)}{2}\cdot\frac{\cos(40°)+\cos(20°)}{2} \\
&= \frac{-\cos(40°)\cos(60°)-\cos(20°)\cos(60°)+\cos(20°)\cos(40°)+\cos(20°)^2}{4} \\
&= \frac{-\frac{\cos(10°)+\cos(20°)}{2}-\frac{\cos(80°)+\cos(40°)}{2}+\frac{\cos(60°)+\cos(20°)}{2}+\frac{\cos(40°)+1}{2}}{4} \\
&= \frac{-\cos(10°)-\cos(80°)+\cos(60°)+1}{8} \\
&= \frac{-2\cos(10°)\cos(90°)+\cos(60°)+1}{8} = \frac{-2\cos(10°)\cdot 0+\frac{1}{2}+1}{8} = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

以上より、

$$\text{与式} = \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}$$

です。

(2)(1)の結果を利用すると、

$$与式=\frac{\tan(10°)\tan(30°)}{\tan(20°)\tan(40°)}\cdot\frac{\tan(50°)\tan(70°)}{\tan(30°)\tan(80°)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\tan(50°)\tan(70°)}{\tan(30°)\tan(80°)}$$

となりますから、tanをsin、cosに変換して、

$$\frac{\tan(50°)\tan(70°)}{\tan(30°)\tan(80°)}=\frac{\cos(30°)\sin(50°)\sin(70°)\cos(80°)}{\sin(30°)\cos(50°)\cos(70°)\sin(80°)}$$

の値を求めればよいです。(1)と同様に三角関数の積を和に分解して、

$$分子=\frac{-\cos(230°)-\cos(170°)+\cos(130°)+\cos(90°)+\cos(30°)-\cos(10°)}{8}$$

$$=\frac{\cos(230°-180°)+\cos(180°-170°)-\cos(180°-130°)+\cos(90°)+\cos(30°)-\cos(10°)}{8}$$

$$=\frac{\cos(50°)+\cos(10°)-\cos(50°)+\cos(90°)+\cos(30°)-\cos(10°)}{8}$$

$$=\frac{\cos(90°)+\cos(30°)}{8}=\frac{0+\frac{\sqrt{3}}{2}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{16}$$

また、

$$分母=\frac{-\cos(230°)+\cos(170°)-\cos(130°)-\cos(90°)+2\cos(70°)+\cos(30°)-\cos(10°)}{8}$$

$$=\frac{\cos(230°-180°)-\cos(180°-170°)+\cos(180°-130°)-\cos(90°)+2\cos(70°)+\cos(30°)-\cos(10°)}{8}$$

$$=\frac{-\cos(90°)+\cos(30°)-2\cos(10°)+2\{\cos(70°)+\cos(50°)\}}{8}$$

$$=\frac{-\cos(90°)+\cos(30°)-2\cos(10°)+4\cos(10°)\cos(60°)}{8}$$

$$=\frac{-\cos(90°)+\cos(30°)-2\cos(10°)\{1-2\cos(60°)\}}{8}$$

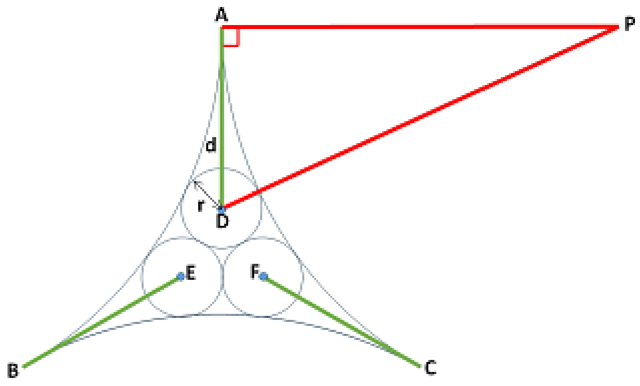
$$=\frac{-0+\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cos(10°)\left\{1-2\frac{1}{2}\right\}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{16}$$

以上より、

$$与式=\frac{1}{3}\cdot\frac{分子}{分母}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{16}}{\frac{\sqrt{3}}{16}}=\frac{1}{3}$$

です。

追加問題1

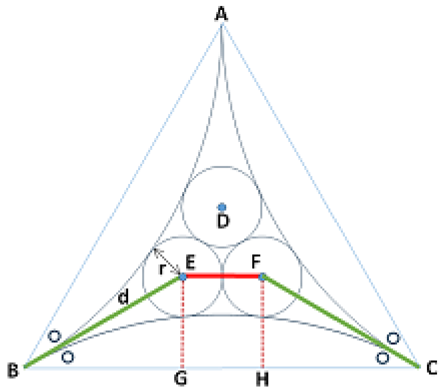


左図のように、円の中心をD、E、F、半径をrとします。
三角形の頂点A、B、CとD、E、Fに緑の線分を引きます。図形の対称性から、その線分の長さは等しく、$AD = BE = CF = d$とします。
また、弧ACの中心をPとして、赤の直角三角形APDに三平方の定理を適用すると、

$$AP^2 + AD^2 = PD^2$$

$$\Rightarrow 1^2 + d^2 = (1 + r)^2 \cdots ①$$

です。



次に、BE、CFは角B、Cの二等分線で、$\angle EBG = \angle FCH = 30°$ですから、

$$BG = \frac{\sqrt{3}}{2}BE = \frac{\sqrt{3}}{2}d、CH = \frac{\sqrt{3}}{2}CF = \frac{\sqrt{3}}{2}d$$

です。すると、

$$BG + GH + CH = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}d + 2r + \frac{\sqrt{3}}{2}d = 1 \cdots ②$$

です。

①②を解くと、

$$r = 5 \pm 2\sqrt{6}、d = \mp 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$$

となります。$r < 1$なので、$r = 5 - 2\sqrt{6}$が適切です。
以上より、甲円の半径は$5 - 2\sqrt{6}$です。

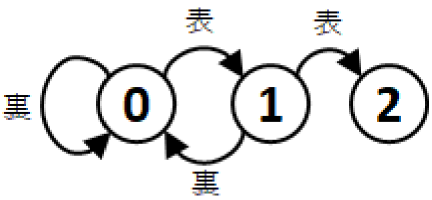
追加問題2 コイントスの状態を次のように定義します。

状態⓪　　0 回連続して表が出た

状態①　　1 回連続して表が出た

状態②　　2 回連続して表が出た

そして、n回目に状態②にいる確率をP_n、①にいる確率をQ_n、⓪にいる確率をR_nとすると、



$$P_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} \cdots ①$$

$$Q_n = \frac{1}{2}R_{n-1} \cdots ②$$

$$R_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} + \frac{1}{2}R_{n-1} \cdots ③$$

②③より、R消去すると、

$$2Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{2}Q_{n-1}$$

です。$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$、$\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$とすると、上式は、

$$Q_{n+1} - \alpha Q_n = \beta(Q_n - \alpha Q_{n-1}) = \beta^{n-1}(Q_2 - \alpha Q_1)$$

となります。ここで、$Q_1 = \frac{1}{2}$、$Q_2 = \frac{1}{4}$なので、

$$Q_{n+1} - \alpha Q_n = \beta^{n-1}(Q_2 - \alpha Q_1) = \beta^{n-1}\left(\frac{1}{4} - \alpha \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{(1-2\alpha)\beta^{n-1}}{4} \cdots ④$$

また、αとβを入れ替えても、同様のことが言えるので、

$$Q_{n+1} - \beta Q_n = \alpha^{n-1}(Q_2 - \beta Q_1) = \alpha^{n-1}\left(\frac{1}{4} - \beta \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{(1-2\beta)\alpha^{n-1}}{4} \cdots ⑤$$

です。④−⑤より、

$$Q_{n+1} - \alpha Q_n - (Q_{n+1} - \beta Q_n) = \frac{(1-2\alpha)\beta^{n-1}}{4} - \frac{(1-2\beta)\alpha^{n-1}}{4}$$

$$\Rightarrow Q_n = \frac{(1-2\alpha)\beta^{n-1} - (1-2\beta)\alpha^{n-1}}{4(\beta-\alpha)}$$

となるので、①より、

$$P_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} = \frac{1}{2}\frac{(1-2\alpha)\beta^{n-2} - (1-2\beta)\alpha^{n-2}}{4(\beta-\alpha)} = \frac{(1-2\alpha)\beta^{n-2} - (1-2\beta)\alpha^{n-2}}{8(\beta-\alpha)}$$

です。

これに、$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$、$\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$を代入して、

$$P_n=\frac{(1-2\alpha)\beta^{n-2}-(1-2\beta)\alpha^{n-2}}{8(\beta-\alpha)}$$

$$=\frac{\left(1-2\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2}-\left(1-2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2}}{8\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

です。

よって、期待値Eは、

$$E=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P_n=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot\frac{\sqrt{5}}{10}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

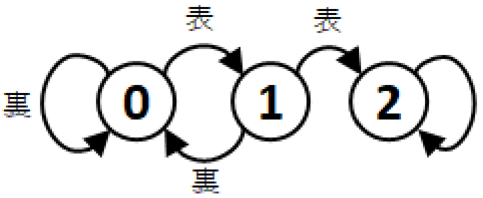
$$=\frac{\sqrt{5}}{10}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

ここで、補足1より、

$$\text{上式}=\frac{\sqrt{5}}{10}\left\{\frac{\left(2-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}-\frac{\left(2-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\frac{1-\sqrt{5}}{4}}{\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2}\right\}=6$$

です。以上より、求める期待値は6です。

(1)の別解　状態遷移がマルコフ連鎖であることに着目して、次のようにやれば、各状態の確率を機械的に求めることができます。



左図の状態推移を確率行列Aで表現します。

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

適当な行列Sを用いて、Aを以下のように対角化することができます（参考までに、対角化の手順を補足3に記載しておきます）。

$$S^{-1}\cdot A\cdot S=\begin{bmatrix}1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{4}\end{bmatrix}$$

両辺を n 乗すると、

$$(S^{-1}\cdot A\cdot S)^n=S^{-1}\cdot A^n\cdot S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n\end{bmatrix}$$

なので、

$$A^n=S\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n\end{bmatrix}S^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^n+(5-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^n}{5\cdot 2^{2n+1}} & \frac{\sqrt{5}\{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n\}}{5\cdot 2^{2n}} & \frac{5\cdot 2^{2n+1}-(3\sqrt{5}+5)(1+\sqrt{5})^n+(3\sqrt{5}-5)(1-\sqrt{5})^n}{5\cdot 2^{2n+1}}\\ \frac{\sqrt{5}\{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n\}}{5\cdot 2^{2n}} & \frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^n+(5+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^n}{5\cdot 2^{2n+1}} & \frac{5\cdot 2^{2n+1}-(\sqrt{5}+5)(1+\sqrt{5})^n+(\sqrt{5}-5)(1-\sqrt{5})^n}{5\cdot 2^{2n+1}}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

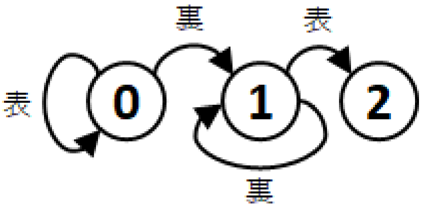
となり、各状態の確率が求まります。

n回目で初めて状態②にいる確率P_nは、A^nの1行3列の要素からA^{n-1}を引けばよいので（A^{n-1}の1行2列の要素に$\frac{1}{2}$を掛ける方が計算は楽ですが）、

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{5\cdot 2^{2n+1}-(3\sqrt{5}+5)(1+\sqrt{5})^n+(3\sqrt{5}-5)(1-\sqrt{5})^n}{5\cdot 2^{2n+1}} \\
&\quad -\frac{5\cdot 2^{2(n-1)+1}-(3\sqrt{5}+5)(1+\sqrt{5})^{(n-1)}+(3\sqrt{5}-5)(1-\sqrt{5})^{(n-1)}}{5\cdot 2^{2(n-1)+1}} \\
&= \frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(5+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{5\cdot 2^{2n+1}} \\
&= \frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1}+\left(5+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{5\cdot 2^3\cdot(2^2)^{n-1}} \\
&= \frac{4\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1}-4\sqrt{5}(1-\sqrt{5})^{n-1}}{5\cdot 2^3\cdot(2^2)^{n-1}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{10}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}
\end{aligned}
$$

となります。期待値は前ページでやった計算と同じです。

(2) コイントスの状態を文章で表現するとわかり難いので、次のように考えると良いと思います。



左図のようなグラフがあって、コイントスをしながら、頂点⓪から②に移動するとき、その経路の長さの期待値はいくつですか？

n回目に⓪にいる確率を$\mathrm{R_n}$、状態①にいる確率を$\mathrm{Q_n}$、状態②にいる確率を$\mathrm{P_n}$とすると、

$$\mathrm{R_n} = \frac{1}{2}\mathrm{R_{n-1}} \cdots ①$$

$$\mathrm{Q_n} = \frac{1}{2}\mathrm{Q_{n-1}} + \frac{1}{2}\mathrm{R_{n-1}} \cdots ②$$

$$\mathrm{P_n} = \frac{1}{2}\mathrm{Q_n} \cdots ③$$

です。①②③より、R、Qを消去すると、

$$4\mathrm{P_{n+2}} - 4\mathrm{P_{n+1}} + \mathrm{P_n} = 0$$

です。$\alpha = \frac{1}{2}$とすると、上式は、

$$\mathrm{P_{n+2}} - \alpha\mathrm{P_{n+1}} = \alpha(\mathrm{P_{n+1}} - \alpha\mathrm{P_n}) = \alpha^n(\mathrm{P_2} - \alpha\mathrm{P_1}) \Rightarrow \mathrm{P_n} - \alpha\mathrm{P_{n-1}} = \alpha^{n-2}(\mathrm{P_2} - \alpha\mathrm{P_1})$$

です。ここで、$\mathrm{P_2} = \frac{1}{4}$、$\mathrm{P_1} = 0$なので、

$$\mathrm{P_n} - \alpha\mathrm{P_{n-1}} = \alpha^{n-2}(\mathrm{P_2} - \alpha\mathrm{P_1}) = \alpha^{n-2}\left(\frac{1}{4} - \alpha \cdot 0\right) = \frac{\alpha^{n-2}}{4}$$

となり、両辺をα^nで割って、

$$\frac{\mathrm{P_n}}{\alpha^n} - \frac{\mathrm{P_n} - 1}{\alpha^{n-1}} = \frac{1}{4\alpha^2} \Rightarrow \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\mathrm{P}_i}{\alpha^i} - \frac{\mathrm{P_i} - 1}{\alpha^{i-1}}\right) = \frac{1}{4\alpha^2}\sum_{i=2}^{n} 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{P_n}}{\alpha^n} = \frac{n-1}{4\alpha^2} \Rightarrow \mathrm{P_n} = \frac{(n-1)\alpha^{n-2}}{4}$$

です。$\alpha = \frac{1}{2}$を代入すると。

$$\mathrm{P_n} = \frac{(n-1)\alpha^{n-2}}{4} = \frac{(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{4} = \frac{n-1}{2^n}$$

となります。

よって、期待値Eは、

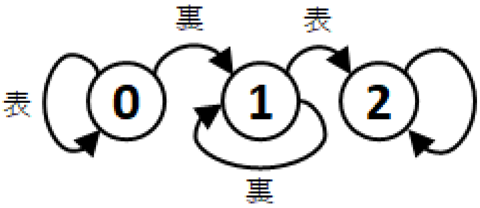
$$\mathrm{E}=\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty}\mathrm{n}\cdot\mathrm{P_n}=\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty}\mathrm{n}\cdot\frac{n-1}{2^n}=\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}-\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

ここで、補足2より、

$$\text{上式}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+4\right\}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}-\frac{\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4$$

です。以上より、求める期待値は4です。

(2)の別解　こちらも、(1)の別解と同様にして、各状態の確率を求めることができます。



左図の状態推移を確率行列Aで表現します。

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

適当な行列Sを用いて、Aを以下のように対角化に近い形にできます（参考までに、手順を補足4に記載しておきます）。

$$S^{-1}\cdot A\cdot S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

両辺を n 乗すると、

$$(S^{-1}\cdot A\cdot S)^{n}=S^{-1}\cdot A^{n}\cdot S=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^{n}} & \frac{n}{2^{n-1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2^{n}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

なので、

$$A^{n}=S\begin{bmatrix}\frac{1}{2^{n}} & \frac{n}{2^{n-1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2^{n}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}S^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2^{n}} & \frac{n}{2^{n-1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2^{n}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^{n}} & \frac{n}{2^{n}} & 1-\frac{n+1}{2^{n}}\\ 0 & \frac{1}{2^{n}} & 1-\frac{1}{2^{n}}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

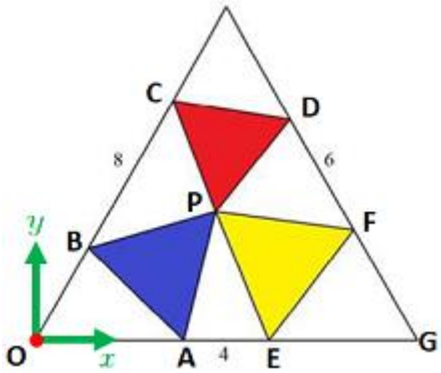
となり、各状態の確率が求まります。

n回目で初めて状態②にいる確率P_nは、A^nの1行3列の要素からA^{n-1}を引けばよいので、

$$P_n=1-\frac{n+1}{2^{n}}-\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)=\frac{n-1}{2^{n}}$$

となります。期待値は前ページでやった計算と同じです。

追加問題3　三角形に諸定理を適用した関係式を解く形で辺の長さを求めようとしましたが、素手で計算できるようなものではありませんでした。仕方なので、次のようにやりました。



左図のように、三角形の頂点に記号を付け、座標系を導入して、

$$\begin{cases} OA = a \\ OB = b \end{cases}$$

とすると、

$$A = (a, 0)$$

$$B = \left(b\cos\frac{\pi}{3}, b\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$$

そして、

$$C = B + \left(8\cos\frac{\pi}{3}, 8\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{b}{2} + 4, \frac{\sqrt{3}b}{2} + 4\sqrt{3}\right)$$

$$E = A + (4,0) = (a + 4,0)$$

また、PはAをBの周りに$\frac{\pi}{3}$回転させればよいので、

$$P = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{\sqrt{3}b}{2} \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{\sqrt{3}b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a + 2b}{2} \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} \end{bmatrix}$$

さらに、DはPをCの周りに、FはEをPの周りに、それぞれ$\frac{\pi}{3}$回転させて、

$$D = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} \frac{a + 2b}{2} \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{b}{2} + 4 \\ \frac{\sqrt{3}b}{2} + 4\sqrt{3} \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} \frac{b}{2} + 4 \\ \frac{\sqrt{3}b}{2} + 4\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a + 3b + 16}{2} \\ \frac{\sqrt{3}a + \sqrt{3}b}{2} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} a + 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{a + 2b}{2} \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} \frac{a + 2b}{2} \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3a + b + 4}{2} \\ \frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b + 4\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

です。$\mathbf{v} = \overrightarrow{FD}$とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = D - F &= \left(\frac{-a + 3b + 16}{2}, \frac{\sqrt{3}a + \sqrt{3}b}{2}\right) - \left(\frac{3a + b + 4}{2}, \frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b + 4\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(-2a + b + 6, \sqrt{3}b - 2\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

となり、与件より、$|\mathbf{v}| = 6 \Rightarrow |\mathbf{v}|^2 = 6^2$なので、

$$(-2a + b + 6)^2 + \left(\sqrt{3}b - 2\sqrt{3}\right)^2 = 6^2 \Rightarrow 4a^2 - 4ab - 24a + 4b^2 + 12 = 0 \cdots ①$$

また、$\mathbf{v}$の傾きは$\tan\frac{2}{3}\pi$なので、

$$\frac{-2a+b+6}{\sqrt{3}b-2\sqrt{3}}=\tan\frac{2}{3}\pi \Rightarrow a-b=2\cdots②$$

です。①②を解いて、$(a,b)=(7,5),(1,-1)$ですが、$b>0$なので、$(a,b)=(7,5)$となります。よって、

$$A=(7,0),B=\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right),C=\left(\frac{13}{2},\frac{13\sqrt{3}}{2}\right),D=\left(12,6\sqrt{3}\right),E=(11,0),F=\left(15,3\sqrt{3}\right),$$

となり、

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-7\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}=\sqrt{39}$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{\left(12-\frac{13}{2}\right)^2+\left(6\sqrt{3}-\frac{13\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{31}$$

$$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{(15-11)^2+\left(3\sqrt{3}-0\right)^2}=\sqrt{43}$$

です。また、直線DFの方程式は、

$$y-6\sqrt{3}=\tan\frac{2}{3}\pi\cdot(x-12)$$

なので、x切片は、

$$0-6\sqrt{3}=\tan\frac{2}{3}\pi\cdot(x-12)\Rightarrow x=18$$

なので、$G=(18,0)$となり、

$$\left|\overrightarrow{OG}\right|=\sqrt{(18-0)^2+(0-0)^2}=18$$

です。以上より、

白の三角形の1辺の長さ$=18$
赤の三角形の1辺の長さ$=\sqrt{31}$
青の三角形の1辺の長さ$=\sqrt{39}$
黄の三角形の1辺の長さ$=\sqrt{43}$

です。

補足１ $\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{n \cdot r^{n-1}}$の計算

$r < 1$のとき、

$$\sum_{n=2}^{\infty} r^n = \frac{r^2}{1-r}$$

なので、両辺をrで微分して、

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot r^{n-1} = \frac{(2-r)r}{(1-r)^2} \cdots ②$$

です。

補足２ $\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{n \cdot r^{n}}$ 、$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{n^2 \cdot r^{n}}$の計算

$r < 1$のとき、②の両辺にrを掛けて、

$$r\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot r^{n-1} = r\frac{(2-r)r}{(1-r)^2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot r^{n} = \frac{(2-r)r^2}{(1-r)^2}$$

さらに、両辺をrで微分して、

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot r^{n-1} = \frac{r(r^2-3r+4)}{(1-r)^3}$$

そして、両辺にrを掛けて、

$$r\sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot r^{n-1} = r\frac{r(r^2-3r+4)}{(1-r)^3} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot r^{n} = \frac{r^2(r^2-3r+4)}{(1-r)^3}$$

補足3

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mathbf{0}\\ \frac{1}{2} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\text{の対角化}$$

次の手順で対角化しました。

特性方程式$|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}|=0$(Eは単位行列)を解いて、固有値$\lambda=1,\frac{\sqrt{5}\pm1}{4}$が求まります。これらに属する固有ベクトルの1つは、それぞれ以下の通りです。

・$\lambda=1$のとき

$$(\mathrm{A}-\mathrm{E})\mathbf{v_1}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

・$\lambda=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$のとき

$$\left(\mathrm{A}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\mathrm{E}\right)\mathbf{v_2}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{v_2}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$$

・$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$のとき

$$\left(\mathrm{A}-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\mathrm{E}\right)\mathbf{v_3}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{v_3}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$$

なので、

$$\mathrm{S}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

を使って、以下のように対角化することができます。

$$\mathrm{S}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{S}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{4}\end{bmatrix}$$

補足4

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$**のジョルダン標準形**

Aは正則行列ですが、後述するように固有値がダブっているので、対角化できません。しかし、それに近いジョルダン標準形を求めることができます。

特性方程式$\left|\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}\right|=0$(Eは単位行列)を解いて、固有値$\lambda=\frac{1}{2}$(重解), 1が求まります。これらに属する固有ベクトルの1つは、それぞれ以下の通りです。

・$\lambda=\frac{1}{2}$(重解)のとき

$$\left(\mathrm{A}-\frac{1}{2}\mathrm{E}\right)\mathbf{v_1}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

もう一つ固有ベクトルが必要なので、$\mathbf{v_1}$から生成します。

$$\left(\mathrm{A}-\frac{1}{2}\mathrm{E}\right)\mathbf{v_2}=\mathbf{v_1}\Rightarrow\mathbf{v_2}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

・$\lambda=1$のとき

$$(\mathrm{A}-\mathrm{E})\mathbf{v_3}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{v_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

以上より、

$$\mathrm{S}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

を使って、以下のようにジョルダン標準形を作ることができます。

$$\mathrm{S}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{S}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$