441 解答　よふかしのつらいおじさん

● $\tan\theta$ の加法定理（等）を確認しておきます。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\ \tan\beta}\qquad\left(\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)$$

$\tan 30°$ を$\tan 10°$ で表します。

$$\tan 30°=\tan(10°+20°)=\frac{\tan 10°+\tan 20°}{1-\tan 10°\ \tan 20°}=\frac{\tan 10°+\tan 2\times 10°}{1-\tan 10°\ \tan 2\times 10°}$$

$$=\frac{\tan 10°+\dfrac{2\tan 10°}{1-\tan^2 10°}}{1-\tan 10°\ \times\dfrac{2\tan 10°}{1-\tan^2 10°}}=\frac{\tan 10°-\tan^3 10°+2\tan 10°}{1-\tan^2 10°-2\tan^2 10°}=\frac{3\tan 10°-\tan^3 10°}{1-3\tan^2 10°}$$

$$\to\ \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3\tan 10°-\tan^3 10°}{1-3\tan^2 10°}\ \to\ \sqrt{3}(3\tan 10°-\tan^3 10°)=1-3\tan^2 10°$$

$$\to\ -\sqrt{3}\tan^3 10°=1-3\sqrt{3}\tan 10°-3\tan^2 10°$$

問題(1)

●上の結果を用います。

$$\frac{\tan 10°\ \tan 30°}{\tan 20°\ \tan 40°}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan 10°}{\tan(30°-10°)\ \tan(30°+10°)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\tan 10°}{\dfrac{\tan 30°-\tan 10°}{1+\tan 30°\ \tan 10°}\ \dfrac{\tan 30°+\tan 10°}{1-\tan 30°\ \tan 10°}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\tan 10°}{\dfrac{\tan^2 30°-\tan^2 10°}{1-\tan^2 30°\ \tan^2 10°}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\tan 10°}{\dfrac{\frac{1}{3}-\tan^2 10°}{1-\frac{1}{3}\tan^2 10°}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\tan 10°\left(1-\frac{1}{3}\tan^2 10°\right)}{\frac{1}{3}-\tan^2 10°}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\tan 10°-\frac{1}{3}\tan^3 10°}{\frac{1}{3}-\tan^2 10°}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{3\tan 10°-\tan^3 10°}{1-3\tan^2 10°}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

問題(2)

(1)の結果から、

$$\frac{\tan 10°\ \tan 30°}{\tan 20°\ \tan 40°}=\frac{1}{3}\ \to\ \frac{\tan 10°\ \times\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\tan 20°\ \tan 40°}=\frac{1}{3}\ \to\ \frac{\tan 10°}{\tan 20°\ \tan 40°}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

なので、

$$\frac{\tan 10°\ \tan 50°\ \tan 70°}{\tan 20°\ \tan 40°\ \tan 80°}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\tan 50°\ \tan 70°}{\tan 80°}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\tan(60°-10°)\ \tan(60°+10°)}{\tan(60°+20°)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\dfrac{\tan 60°-\tan 10°}{1+\tan 60°\ \tan 10°}\times\dfrac{\tan 60°+\tan 10°}{1-\tan 60°\ \tan 10°}}{\dfrac{\tan 60°+\tan 20°}{1-\tan 60°\ \tan 20°}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\dfrac{\sqrt{3}-\tan 10°}{1+\sqrt{3}\ \tan 10°}\times\dfrac{\sqrt{3}+\tan 10°}{1-\sqrt{3}\ \tan 10°}}{\dfrac{\sqrt{3}+\tan 2\times 10°}{1-\sqrt{3}\ \tan 2\times 10°}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\dfrac{3-\tan^2 10°}{1-3\ \tan^2 10°}}{\dfrac{\sqrt{3}+\dfrac{2\tan 10°}{1-\tan^2 10°}}{1-\sqrt{3}\ \dfrac{2\tan 10°}{1-\tan^2 10°}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\dfrac{3-\tan^2 10°}{1-3\ \tan^2 10°}}{\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan^2 10°+2\tan 10°}{1-\tan^2 10°-2\sqrt{3}\tan 10°}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{3-\tan^2 10°}{1-3\ \tan^2 10°}\times\frac{1-2\sqrt{3}\tan 10°-\tan^2 10°}{\sqrt{3}+2\tan 10°-\sqrt{3}\tan^2 10°}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\boldsymbol{3\,tan\,10°-tan^3\,10°}}{1-3\tan^2 10°}\times\frac{1-2\sqrt{3}\tan 10°-\tan^2 10°}{\boldsymbol{\sqrt{3}\,tan\,10°+2\,tan^2\,10°-\sqrt{3}\,tan^3\,10°}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1-2\sqrt{3}\tan 10°-\tan^2 10°}{\boldsymbol{\sqrt{3}\,tan\,10°+2\,tan^2\,10°}+1-3\sqrt{3}\tan 10°-3\tan^2 10°}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1-2\sqrt{3}\tan 10°-\tan^2 10°}{1-2\sqrt{3}\tan 10°-\tan^2 10°}=\frac{1}{3}$$

問題 1

図のように、頂点 B を原点に、辺 BC が X 軸と重なるように座標軸をとります。

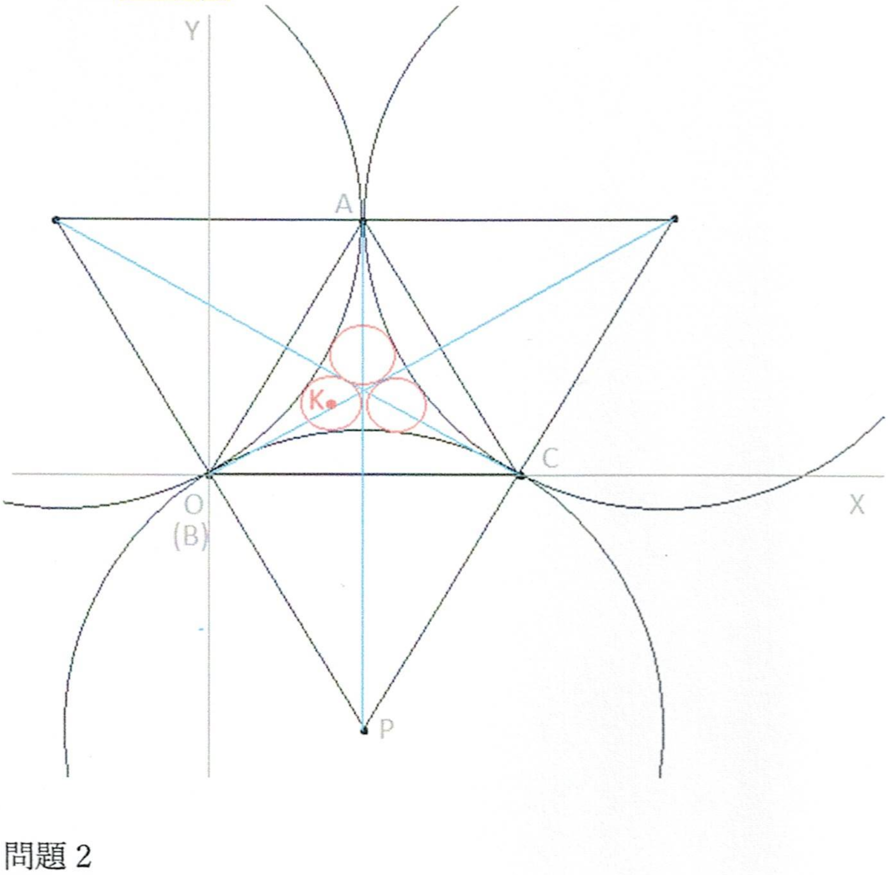
円甲の半径を r とします。

左下の円甲の中心 K は、$\left(\frac{1}{2}-r,\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}-r\right)\right)$

半径 1 の円弧の中心 P は、$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ です。

KP の距離は、1＋ r なので、

$$\left(\frac{1}{2}-r-\frac{1}{2}\right)^2+\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}-r\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2=(1+r)^2 \quad\rightarrow\quad r^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2=1+2r+r^2$$
$$\rightarrow\quad \frac{1}{3}r^2-\frac{10}{3}r+\frac{1}{3}=0 \quad\rightarrow\quad r^2-10r+1=0 \quad\rightarrow\quad r=5\pm2\sqrt{6}(\cong 9.8989\cdots,0.1010\cdots)$$
$$\rightarrow\quad r=5-2\sqrt{6}$$




問題 2

後で使う式を書いておきます。

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+3)\times ar^{k-1}=\frac{3a}{1-r}+\frac{a}{(1-r)^2}$$

なぜなら、左辺を S とおくと、

$$S=4a+5ar+6ar^2+7ar^3+8ar^4+\cdots$$
$$rS=\qquad 4ar+5ar^2+6ar^3+7ar^4+\cdots$$

辺々引き算をして求められます。

$(1-r)S$
$= 4a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots$
$= 3a + a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots$
$= 3a + \dfrac{a}{1-r} \quad \rightarrow \quad S = \dfrac{3a}{1-r} + \dfrac{a}{(1-r)^2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kr^{k+1} = \frac{2r^2}{(1-r)^3}$$

なぜなら、左辺をSとおくと、

$S = 2\cdot 1r^2 + 3\cdot 2r^3 + 4\cdot 3r^4 + 5\cdot 4r^5 + 6\cdot 5r^6 + \cdots$
$rS = \qquad 2\cdot 1r^3 + 3\cdot 2r^4 + 4\cdot 3r^5 + 5\cdot 4r^6 + \cdots$

辺々引き算をすると、

$(1-r)S = 2\cdot 1r^2 + 2\cdot 2r^3 + 2\cdot 3r^4 + 2\cdot 4r^5 + 2\cdot 5r^6 + \cdots$
$r(1-r)S = \qquad 2\cdot 1r^3 + 2\cdot 2r^4 + 2\cdot 3r^5 + 2\cdot 4r^6 + \cdots$

辺々引き算をすると、

$$(1-r)^2S = 2r^2 + 2r^3 + 2r^4 + 2r^5 + 2r^6 + \cdots = \frac{2r^2}{1-r} \quad \rightarrow \quad S = \frac{2r^2}{(1-r)^3}$$

(1)

●表を1、裏を0で表します。

・2回目に終わるのは、{11}

・3回目に終わるのは、{<u>011</u>}

・4回目に終わるのは、{1<u>011</u>}、{0<u>011</u>}

・5回目に終わるのは、{10<u>011</u>}、{01<u>011</u>}、{00<u>011</u>}

・・・・

3回目以後に終わる場合、最後の3回の表裏は、必ず{・・・<u>011</u>}となります。

{・・・}の部分は1が続けて現れることはありません。

{・・・}の部分の最後は、1か0です。

k個並んで最後が1の場合の数を$f1(k)$、k個並んで最後が0の場合の数を$f0(k)$とおきます。

具体的に、

$\begin{cases} f1(1) = 1 & \leftarrow \quad \{1\} \\ f0(1) = 1 & \leftarrow \quad \{0\} \end{cases}$
$\begin{cases} f1(2) = 1 & \leftarrow \quad \{01\} \\ f0(2) = 2 & \leftarrow \quad \{10\}, \{00\} \end{cases}$
$\begin{cases} f1(3) = 2 & \leftarrow \quad \{101\}, \{001\} \\ f0(3) = 3 & \leftarrow \quad \{100\}, \{010\}, (000) \end{cases}$

・・・

$f1(k), f0(k)$ と $f1(k+1), f0(k+1)$ の関係を考えます。

コイントスが1回増えるとき、

k回目が1のときは、k+1回目は、0ですが、

k回目が0のときは、k+1回目は、0でも1でもかまいません。

つまり、

$f1(k+1)$ は、$f0(k)$ の場合の最後に、1が付け加えられたものです。

$f0(k+1)$ は、$f1(k)$ と $f0(k)$ の場合の最後に 0 が付け加えられたものです。
まとめると、

$$\begin{cases} f1(k+1) = \qquad\qquad f0(k) \\ f0(k+1) = f1(k) + f0(k) \end{cases} \quad \begin{cases} f1(1) = 1 \\ f0(1) = 1 \end{cases}$$

この連立漸化式を解きます。

$$f1(k+1) + pf0(k+1) = f0(k) + p\{f1(k) + f0(k)\}$$
$$= p\left\{f1(k) + \frac{p+1}{p} f0(k)\right\}$$
$$p = \frac{p+1}{p} \ \rightarrow \ p^2 - p - 1 = 0 \ \rightarrow \ p = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

・$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき、

$$f1(k+1) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} f0(k+1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left\{f1(k) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} f0(k)\right\}$$

$f1(k) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} f0(k)$ は、等比数列です。
初項 $f1(1) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} f0(1) = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
公比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\boldsymbol{f1(k) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} f0(k) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}} \quad \cdots \quad \textbf{(1)}$$

・$p = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ のとき、

$$f1(k+1) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} f0(k+1) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left\{f1(k) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} f0(k)\right\}$$

$f1(k) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} f0(k)$ は、等比数列です。
初項 $f1(1) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} f0(1) = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
公比 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\boldsymbol{f1(k) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} f0(k) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}} \quad \cdots \quad \textbf{(2)}$$

(1)から(2)を引くと、

$$\sqrt{5} f0(k) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$
$$0(k) = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$
$$\boldsymbol{f0(k) = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}} \quad \cdots \quad \textbf{(3)}$$

(3)を(1)に入れると、

$$f1(k) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left\{\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right\} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$
$$pf1(k) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left\{\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right\}$$

…

$$\boldsymbol{f1(k)=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}} \quad \cdots \quad (4)$$

よって、k 回の中で続けて表が出ない場合の数は、

$$\boldsymbol{f1(k)+f0(k)}$$

$$=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$+\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}$$

●この結果から、k +3 回目に終わる確率 p(k+3)は、

k 回は連続して 1 が出ないで最後の 3 回が{011}となるので、

$$p(k+3)=\frac{f1(k)+f0(k)}{2^k}\times\frac{1}{2^3}=\frac{\boldsymbol{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}}{2^k}\times\frac{1}{2^3}$$

$$=\frac{1}{16}\times\left\{\boldsymbol{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}}\right\}$$

●よって期待値は、

$$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\sum_{k=1}^{\infty}(k+3)\times\frac{1}{16}\left\{\boldsymbol{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{5+2\sqrt{5}}{80}\sum_{k=1}^{\infty}(k+3)\times 1\left(\frac{\boldsymbol{1+\sqrt{5}}}{\boldsymbol{4}}\right)^{\boldsymbol{k-1}}+\frac{\boldsymbol{5-2\sqrt{5}}}{80}\sum_{k=1}^{\infty}(k+3)\times 1\left(\frac{\boldsymbol{1-\sqrt{5}}}{\boldsymbol{4}}\right)^{\boldsymbol{k-1}}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{5+2\sqrt{5}}{80}\times\left\{\frac{3\times 1}{1-\frac{\boldsymbol{1+\sqrt{5}}}{\boldsymbol{4}}}+\frac{1}{\left(1-\frac{\boldsymbol{1+\sqrt{5}}}{\boldsymbol{4}}\right)^2}\right\}+\frac{\boldsymbol{5-2\sqrt{5}}}{80}\times\left\{\frac{3\times 1}{1-\frac{\boldsymbol{1-\sqrt{5}}}{\boldsymbol{4}}}+\frac{1}{\left(1-\frac{\boldsymbol{1-\sqrt{5}}}{\boldsymbol{4}}\right)^2}\right\}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{5+2\sqrt{5}}{80}\times\left\{\frac{12}{3-\sqrt{5}}+\frac{16}{(3-\sqrt{5})^2}\right\}+\frac{5-2\sqrt{5}}{80}\times\left\{\frac{12}{3+\sqrt{5}}+\frac{16}{(3+\sqrt{5})^2}\right\}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\times\left\{\frac{3}{3-\sqrt{5}}\times\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\frac{4}{14-6\sqrt{5}}\right\}+\frac{5-2\sqrt{5}}{20}\times\left\{\frac{3}{3+\sqrt{5}}\times\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}+\frac{4}{14+6\sqrt{5}}\right\}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\times\left\{\frac{9+3\sqrt{5}}{4}+\frac{2}{7-3\sqrt{5}}\times\frac{7+3\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}\right\}+\frac{5-2\sqrt{5}}{20}\times\left\{\frac{9-3\sqrt{5}}{4}+\frac{2}{7+3\sqrt{5}}\times\frac{7-3\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}\right\}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\times\left\{\frac{9+3\sqrt{5}}{4}+\frac{14+6\sqrt{5}}{4}\right\}+\frac{5-2\sqrt{5}}{20}\times\left\{\frac{9-3\sqrt{5}}{4}+\frac{14-6\sqrt{5}}{4}\right\}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\times\left\{\frac{23+9\sqrt{5}}{4}\right\}+\frac{5-2\sqrt{5}}{20}\times\left\{\frac{23-9\sqrt{5}}{4}\right\}=\frac{11}{8}+\frac{205+91\sqrt{5}}{80}+\frac{205-91\sqrt{5}}{80}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{205}{40}=\frac{7}{8}+\frac{41}{8}=\frac{48}{8}=6$$

(2)

●表を 1、裏を 0 で表します。

・2 回目に終わるのは、{01}

・3 回目に終わるのは、{101}、{001}

・4 回目に終わるのは、{1101}、{1001}、{0001}

・5 回目に終わるのは、{11101}、{11001}、{10001}、{00001}

・・・・

最後の 2 回は、{・・・01}です。

{・・・}の部分は、前半が 1、後半が 0 です。

k 回目に終わる場合の数は、k −1 通りです。

k 回目に終わる確率 p(k)は、

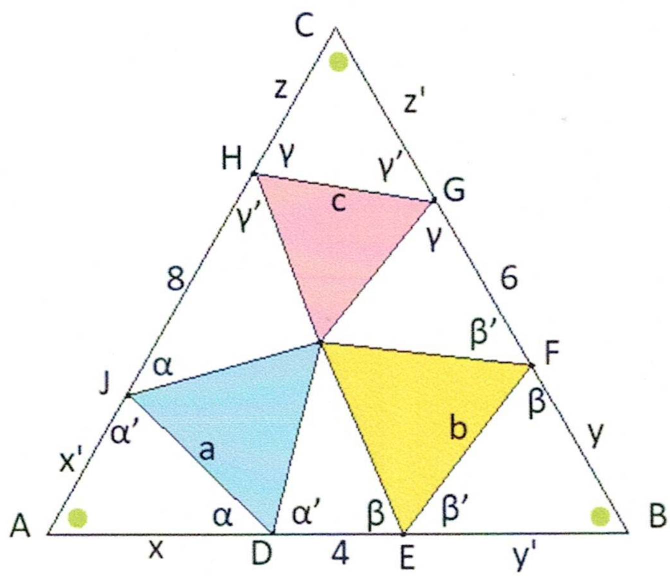
$$p(k) = \frac{k-1}{2^k} \quad \rightarrow \quad p(k+1) = \frac{k}{2^{k+1}}$$

よって期待値は、2 回目に終わるのが最初なので、

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1) \times \frac{k}{2^{k+1}} = \frac{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4$$

問題 3

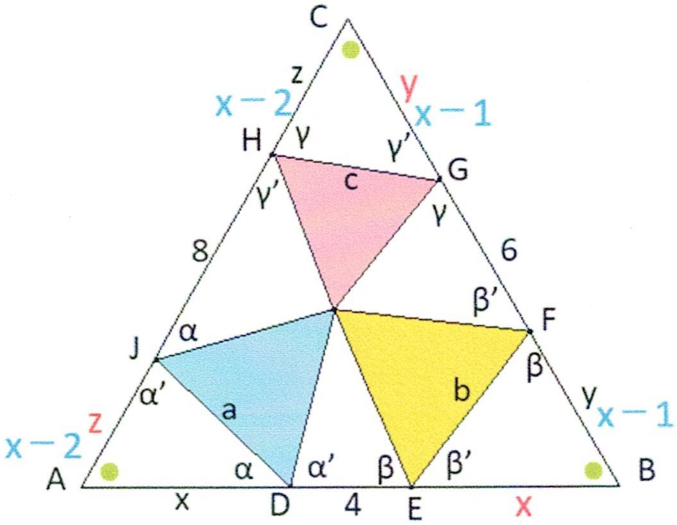
●図のように記号をつけます。




三角形の面積を調べ大きさを比べます。

| | △ADJ | △BFE | △CHG | △KDE | △KFG | △KHJ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 面積 | $\frac{\sqrt{3}}{4}xx'$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}yy'$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}zz'$ | | | |
| 比 | $(xx')$ | $(yy')$ | $(zz')$ | | | |
| 面積 | $\frac{1}{2}ax\sin\alpha$ | | | | | $\frac{1}{2}8a\sin\alpha$ |
| 比 | x | | | | | 8 |
| 面積 | $\frac{1}{2}ax'\sin\alpha'$ | | | $\frac{1}{2}4a\sin\alpha'$ | | |
| 比 | x' | | | 4 | | |
| 比 | $(xx')$ | | | $(4x)$ | | $(8x')$ |
| 面積 | | $\frac{1}{2}by\sin\beta$ | | $\frac{1}{2}4b\sin\beta$ | | |
| 比 | | y | | 4 | | |
| 面積 | | $\frac{1}{2}by'\sin\beta'$ | | | $\frac{1}{2}6b\sin\beta'$ | |
| 比 | | y' | | | 6 | |
| 比 | | $(yy')$ | | $(4y')$ | $(6y)$ | |
| 面積 | | | $\frac{1}{2}cz\sin\gamma$ | | $\frac{1}{2}6c\sin\gamma$ | |
| 比 | | | z | | 6 | |
| 面積 | | | $\frac{1}{2}cz'\sin\gamma'$ | | | $\frac{1}{2}8c\sin\gamma'$ |
| 比 | | | z' | | | 8 |
| 比 | | | $(zz')$ | | $(6z')$ | $(8z)$ |
| まとめ | (xx') | (yy') | $(zz')$ | $(4x)$<br>$(4y')$ | $(6y)$<br>$(6z')$ | $(8x')$<br>$(8z)$ |

・この表から x＝y’、y＝z’、x’＝z が分かります。




よって、

・2x＋4＝2y＋6＝2z＋8 なので、y＝x−1、z＝x−2 です。

・$a^2$, $b^2$, $c^2$ を求めます。

$a^2 = (x-2)^2 + x^2 - 2(x-2)x\cos 60° = x^2 - 2x + 4$
$b^2 = x^2 + (x-1)^2 - 2x(x-1)\cos 60° = x^2 - x + 1$
$c^2 = (x-1)^2 + (x-2)^2 - 2(x-1)(x-2)\cos 60° = x^2 - 3x + 3$

●各三角形の面積を求めます。

・△ADJ、△BFE、△CHG

$$\Delta ADJ = \frac{\sqrt{3}}{4}x(x-2),\ \Delta BFE = \frac{\sqrt{3}}{4}x(x-1),\ \Delta CHG = \frac{\sqrt{3}}{4}(x-1)(x-2)$$

・△KDE、△KFG、△KHJ

$$\Delta KDE = \frac{\sqrt{3}}{4}4x,\ \Delta KFG = \frac{\sqrt{3}}{4}6(x-1),\ \Delta KHJ = \frac{\sqrt{3}}{4}8(x-2)$$

・△KJD 青、△KEF 黄、△KGH 赤

$$\Delta KJD = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-2x+4),\ \Delta KEF = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-x+1),\ \Delta KGH = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-3x+3)$$

・・△ABC 全体

$$\Delta ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x+4)^2$$

● x を求めます。

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ を約して、

$\{x(x-2) + x(x-1) + (x-1)(x-2)\}$
$+\{4x + 6(x-1) + 8(x-2)\}$
$+\{(x^2-2x+4) + (x^2-x+1) + (x^2-3x+3)\}$
$= (2x+4)^2$
$\{3x^2-6x+2\} + \{18x-22\} + \{3x^2-6x+8\} = 4x^2+16x+16$
$2x^2 - 10x - 28 = 0 \quad \rightarrow \quad 2(x-7)(x+2) = 0$
$x = 7(>0)$

●よって正三角形の辺の長さはそれぞれ、

白 $2x+4 \quad \rightarrow \quad 2\times 7+4 = 18$、

青 $\sqrt{x^2-2x+4} \quad \rightarrow \quad \sqrt{7^2-2\times 7+4} = \sqrt{39}$

黄 $\sqrt{x^2-x+1} \quad \rightarrow \quad \sqrt{7^2-7+1} = \sqrt{43}$

赤 $\sqrt{x^2-3x+3} \quad \rightarrow \quad \sqrt{7^2-3\times 7+3} = \sqrt{31}$