● 問題 441 解答＜三角定規＞

[問題] (1) $I=\dfrac{\tan 10° \ \tan 30°}{\tan 20° \ \tan 40°}$ …①

$\tan 10° = u$ と置くと，倍角公式より $\tan 20° = \dfrac{2u}{1-u^2}$ …②

3 倍角の公式より，$\tan 30° = \dfrac{3u-u^3}{1-3u^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ …③

加法公式より $\tan 40° = \tan(30° + 10°) = \dfrac{1/\sqrt{3}+u}{1-u/\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}u}{\sqrt{3}-u}$ …④

②③④を①に代入して整理すると

$I=\dfrac{(1-u^2)(\sqrt{3}-u)}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3}u)} = \dfrac{3-\sqrt{3}u-3u^2+\sqrt{3}u^3}{6(1+\sqrt{3}u)}$ …⑤

③より $\sqrt{3}u^3-3u^2=3\sqrt{3}u-1$ …③′

③′を⑤に代入し，$I=\dfrac{3-\sqrt{3}u+3\sqrt{3}u-1}{6(1+\sqrt{3}u)} = \dfrac{2(1+\sqrt{3}u)}{6(1+\sqrt{3}u)} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ …[答]

(2) $J=\dfrac{\tan 10° \ \tan 50° \ \tan 70°}{\tan 20° \ \tan 40° \ \tan 80°}$ …⑥

①⑥及び(1)の結果より

$$J=I\cdot\frac{\tan 50° \ \tan 70°}{\tan 30° \ \tan 80°} = \frac{\sqrt{3}}{3}\tan 10° \ \tan 50° \ \tan 70°$$

$$\tan 50° = \tan(60° - 10°) = \frac{\sqrt{3}-u}{1+\sqrt{3}u}$$

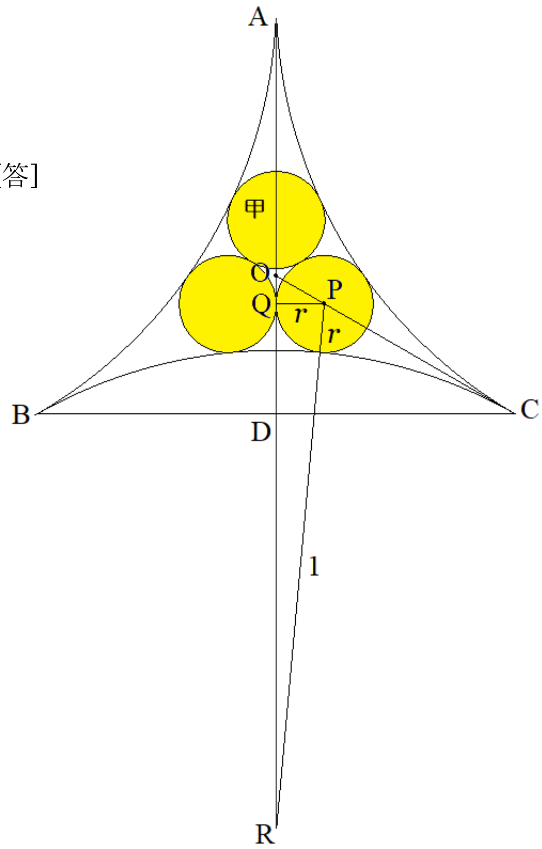
$$\tan 70° = \tan(60° + 10°) = \frac{\sqrt{3}+u}{1-\sqrt{3}u}$$

$$\therefore\ J=\frac{\sqrt{3}}{3}u\cdot\frac{\sqrt{3}-u}{1+\sqrt{3}u}\cdot\frac{\sqrt{3}+u}{1-\sqrt{3}u} = \frac{\sqrt{3}(3u-u^3)}{3(1-3u^2)} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$ …[答]

(∵③)

《追加問題》

[問題 1] 甲円の半径を r とし,右図のように各点を定める。



$\mathrm{OD}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $\mathrm{DR}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{OQ}=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ だから

$\mathrm{QR}=\mathrm{OD}+\mathrm{DR}-\mathrm{OQ}=\dfrac{2-r}{\sqrt{3}}$

直角三角形 PQR に三平方の定理を適用し，

$(1+r)^2=\dfrac{(2-r)^2}{3}+r^2 \quad \therefore\ r^2-10r+1=0$

$r<1$ でこれを解いて，$r=\boldsymbol{5-\sqrt{24}}$ $(=0.101\cdots)$ …[答]

［問題２］

(1) 得点が n となるのは,

・ $n-2$ 回まで表が 2 連続することなく , $n-2$ 回目が **裏**, 以後 **表表** $\cdots$①

と出る場合である。そこで,

コインを n 回投げて表が 2 回連続して出ない出方の内,

n 回目が裏のものが $a(n)$ 通り, 表のものが $b(n)$ 通り

とすると, 明らかに

$$b(n)=a(n-1),\ a(n)=a(n-1)+b(n-1)$$

が成り立つから, この 2 式から

$$a(n)=a(n-1)+a(n-2),\quad a(1)=1,\ a(2)=2 \quad \cdots②$$

が成り立つ。②を解いて

$$a(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad \cdots③$$

①③より , このゲームで得点が n となる確率 $p(n)$ は， $p(n)=\dfrac{1}{2^n}a(n-2)$

よって，得点の期待値 E は， $E=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}np(n)=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}n\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}$

ここで, $\sum\alpha^n$ が収束するとき, $\displaystyle\sum n\alpha^{n-1}=\frac{d}{d\alpha}\sum\alpha^n=\frac{1}{(1-\alpha)^2}$ $\cdots$④ だから

$$E=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{(1-(1+\sqrt{5})/4)^2}-\frac{1}{(1-(1-\sqrt{5})/4)^2}\right\}=\mathbf{6} \quad \cdots[答]$$

(2) 得点が n となるのは,

・ $n-1$ 回目が **裏** で n 回目が **表**
・ $n-2$ 回目までは, $0\leqq k\leqq n-2$ として k 回連続 **表**, 続く $n-2-k$ 回連続して **裏**

となる場合だから , そのようになる確率 $q(n)$ は， $q(n)=\dfrac{n-1}{2^n}$

よって，得点の期待値 E は， $E=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nq(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2^n}$

④を再度 α で微分して $\displaystyle\sum n(n-1)\alpha^{n-2}=\frac{2}{(1-\alpha)^3}$

$$\therefore\ E=\left(\frac{1}{2}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{(1/2)^3}=\mathbf{4} \quad \cdots[答]$$