第 442 回

問題１　大分大学の過去問の類題

$0<x\leqq y\leqq z$ のとき，

$2(xy+yz+zx)=9(x+y+z)$ を満たす自然数 $(x,\ y,\ z)$ の組をすべて求めよ。

答　$2(xy+yz+zx)=9(x+y+z)$ から，$x(2y-9)+y(2z-9)+z(2x-9)=0$　…①

$x\geqq 5$ のとき $z\geqq y\geqq 5$ となるから，① の左辺が正となり，不適である。

よって，$x=1,\ 2,\ 3,\ 4$

[1]　$x=1$ のとき

　① から，$2yz-7y-7z-9=0$

　両辺に 2 を掛けて，$4yz-14y-14z-18=0$

　変形すると，$(2y-7)(2z-7)=67$ （素数）

　$2z-7\geqq 2y-7\geqq 2\cdot 1-7=-5$ であるから，$(2y-7,\ 2z-7)=(1,\ 67)$

　よって，$(y,\ z)=(4,\ 37)$

[2]　$x=2$ のとき

　① から，$2yz-5y-5z-18=0$

　両辺に 2 を掛けて，$4yz-10y-10z-36=0$

　変形すると，$(2y-5)(2z-5)=61$ （素数）

　$2z-5\geqq 2y-5\geqq 2\cdot 2-5=-1$ であるから，$(2y-5,\ 2z-5)=(1,\ 61)$

　よって，$(y,\ z)=(3,\ 33)$

[3]　$x=3$ のとき

　① から，$2yz-3y-3z-27=0$

　両辺に 2 を掛けて，$4yz-6y-6z-54=0$

　変形すると，$(2y-3)(2z-3)=63$

　$2z-3\geqq 2y-3\geqq 2\cdot 3-3=1$ であるから，$(2y-3,\ 2z-3)=(1,\ 63),\ (3,\ 21),\ (7,\ 9)$

　$y\geqq x$ より，$(3,\ 21),\ (7,\ 9)$

　よって，$(y,\ z)=(3,\ 12),\ (5,\ 6)$

[4]　$x=4$ のとき

　① から，$2yz-y-z-36=0$

　両辺に 2 を掛けて，$4yz-2y-2z-72=0$

　変形すると，$(2y-1)(2z-1)=73$ （素数）

　$2z-1\geqq 2y-1\geqq 2\cdot 4-1=7$ であるから，$(2y-5,\ 2z-5)=(1,\ 73)$　　不適

以上から，求める自然数 $x,\ y,\ z$ の組は，

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 4,\ 37),\ (2,\ 3,\ 33),\ (3,\ 3,\ 12),\ (3,\ 5,\ 6)$　答

問題２　筑波大学の過去問の類題（訂正問題）

$m^3+n^3-9mn=p-27$ を満たす正の整数 m，n と素数 p の組 (m, n, p) をすべて求めよ。

解答　$p=m^3+n^3-9mn+27=m^3+n^3+3^3-3mn\cdot 3=(m+n+3)(m^2+n^2+9-mn-3n-3m)$

m，n は正の整数であるから，$m\geqq 1$，$n\geqq 1$ より，$m+n+3\geqq 5$

p は素数であるから，$m^2+n^2+9-mn-3n-3m=1$

m について整理すると，$m^2-(n+3)m+n^2-3n+8=0$　…①

m についての２次方程式の判別式を D とおくと，$D=(n+3)^2-4(n^2-3n+8)=-(3n^2-18n+23)\geqq 0$ より，

$\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3}\leqq n\leqq\dfrac{9+2\sqrt{3}}{3}$　　$3<2\sqrt{3}<4$ であるから，これを満たす整数は，$n=2, 3, 4$

①より，$m=\dfrac{n+3\pm\sqrt{-3n^2+18n-23}}{2}$ であるから，

[1]　$n=2$ のとき，$m=2, 3$

$m+n+3$ が素数になるのは，$(m, n)=(2, 2)$ のときで，このとき，$p=7$

[2]　$n=3$ のとき，$m=2, 4$

$(m, n)=(2, 3)$，$(4, 3)$ のとき，$m+n+3$ は素数にならない。

[3]　$n=4$ のとき，$m=3, 4$

$m+n+3$ が素数になるのは，$(m, n)=(4, 4)$ のときで，このとき，$p=11$

よって，$(m, n, p)=(2, 2, 7)$，$(4, 4, 11)$　答

問題３　$(1+x)(1+y)(x+y)=300$，$x^3+y^3=99$ のとき，$x+y$ の値を求めよ。

解答　$(1+x)(1+y)(x+y)=300$　…①，$x^3+y^3=99$　…②とおく。

①より，$(1+x+y+xy)(x+y)=300$　　$(x+y)+(x+y)^2+xy(x+y)=300$　…①′

②より，$(x+y)^3-3xy(x+y)=99$　…②′

①′×３＋②′より，$(x+y)^3+3(x+y)^2+3(x+y)=999$

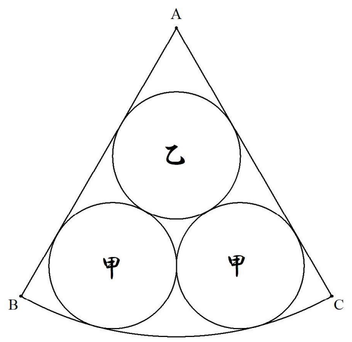
両辺に１を加えると，$(x+y+1)^3=10^3$

$x+y+1=10$，10ω，$10\omega^2$　（$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$）

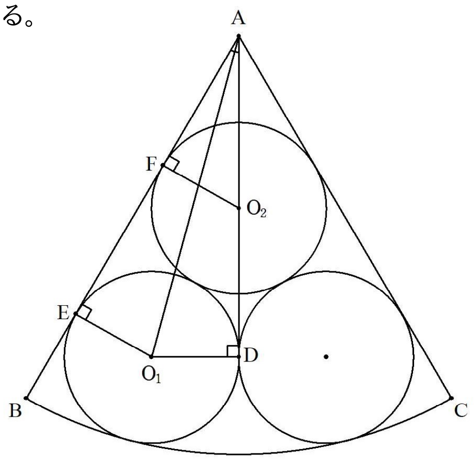
$\therefore x+y=9$，$-6\pm 5\sqrt{3}i$　答

追加問題１

A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧BCは半径１の円弧である。
弧BC，CA，ABで囲まれた図形の中に互いに
互いに接する甲円２個と乙円１弧を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\angle O_1AD = \angle O_1AF = 15^\circ$ である。

$\triangle AO_1D$ について，$AO_1 = 1 - r_1$，$O_1D = r_1$ より，$\sin 15^\circ = \dfrac{r_1}{1-r_1}$

$$\therefore r_1 = \frac{\sin 15^\circ}{1+\sin 15^\circ} = \frac{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{1+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)}{8-(4-2\sqrt{3})} = \frac{-4-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{3})}$$

$$= (-2-\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{6})(2-\sqrt{3})$$

$$= -7-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6} \quad (\fallingdotseq 0.205605)$$

$\triangle AO_2F$ について，$\angle O_2AF = 30^\circ$，$O_2F = r_2$ であるから，$AF = \sqrt{3}\,r_2$

また，$FE = \sqrt{(r_2+r_1)^2-(r_2-r_1)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$ である。

$\tan 15^\circ = \dfrac{r_1}{\sqrt{3}\,r_2+2\sqrt{r_1r_2}} = 2-\sqrt{3}$ より，$r_1 - 2(2-\sqrt{3})\sqrt{r_1r_2} - \sqrt{3}(2-\sqrt{3})r_2 = 0$

両辺を r_2 で割ると，$\dfrac{r_1}{r_2} - 2(2-\sqrt{3})\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}} - \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = 0$

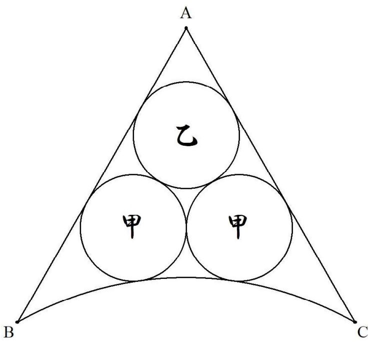
$$\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = (2-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(2-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = (2-\sqrt{3}) \pm (\sqrt{3}-1) = 1,\ 3-2\sqrt{3}$$

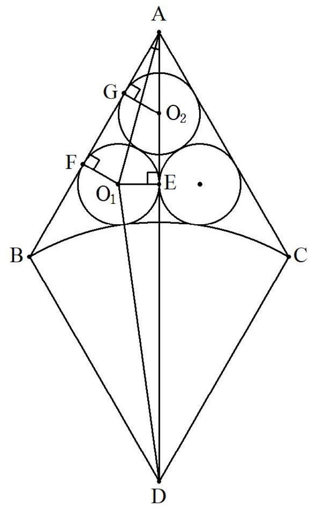
$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}} > 0$ より，$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}} = 1 \quad \therefore r_1 = r_2$（甲円，乙円の半径は等しい。）

よって，甲乙円の半径は，甲：$-7-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}$，乙：$-7-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}$　答

追加問題２

A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC は半径１の円弧である。
弧 BC，CA，AB で囲まれた図形の中に互いに
互いに接する甲円２個と乙円１弧を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。





解答　左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。

$\angle O_1AE=\angle O_1AF=15^\circ$ である。

$\triangle O_1DE$ について，$O_1D=1+r_1$，$O_1E=r_1$ より，

$DE=\sqrt{(1+r_1)^2-r_1{}^2}=\sqrt{1-2r_1}$ であるから，$AE=\sqrt{3}-\sqrt{1-2r_1}$

$\triangle AO_1E$ について，$\tan 15^\circ=\dfrac{r_1}{\sqrt{3}-\sqrt{1-2r_1}}=2-\sqrt{3}$

$r_1=(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{1-2r_1})$

移項すると，$(2-\sqrt{3})\sqrt{1-2r_1}=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})-r_1$

両辺を２乗すると，$(2-\sqrt{3})^2(1-2r_1)=3(2-\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})r_1+r_1{}^2$

$r_1{}^2-4(2-\sqrt{3})r_1+2(2-\sqrt{3})^2=0$

$r_1=2(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{2}(2-\sqrt{3})=(2-\sqrt{3})(2\pm\sqrt{2})$

題意に適するのは，$r_1=(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$　（$\fallingdotseq 0.156961$）

次に，

$\triangle AO_2G$ について，$\angle O_2AG=30^\circ$，$O_2G=r_2$ であるから，$AG=\sqrt{3}\,r_2$

また，$FG=\sqrt{(r_2+r_1)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$ である。

$\tan 15^\circ=\dfrac{r_1}{\sqrt{3}\,r_2+2\sqrt{r_1r_2}}=2-\sqrt{3}$ より，$r_1-2(2-\sqrt{3})\sqrt{r_1r_2}-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})r_2=0$

両辺を r_2 で割ると，$\dfrac{r_1}{r_2}-2(2-\sqrt{3})\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=0$

$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}=(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}=(2-\sqrt{3})\pm(\sqrt{3}-1)=1,\ 3-2\sqrt{3}$

$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}>0$ より，$\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}=1$　$\therefore r_1=r_2$（甲円，乙円の半径は等しい。）

よって，甲乙円の半径は，甲： $4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$，乙： $4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$　答

(2024/5/27　ジョーカー)