問題1　よいやり方が浮かばなかったので、地道に調べました。与式をzについて解くと、

$$z = \frac{9(x+y) - 2xy}{2(x+y) - 9}$$

です。ここで、$2(x+y)$は偶数なので、分母 $= 0$ではありません。

分母 < 0とすれば、$(x, y) = (1,1), (1,2), (1,3), (2,2)$の組合せが考えられますが、いずれのケースも$z < 0$なので、分母 > 0です。よって、分子 $> 0 \Rightarrow 9(x+y) > 2xy$です。ここで、$x \leq y$なので、

$$9(x+y) > 2xy = xy + xy \geq x^2 + xy = x(x+y) \Rightarrow 9 > x$$

です。

したがって、$x \leq 8$かつ$2(x+y) > 9$のケースを調べ上げればよくて、下表のようになります。色付けしたところが、条件を満たします。

x	y	z
1	4	37
	5	$\frac{44}{3}$
	6	$\frac{51}{5}$
	7	$\frac{58}{7}$
	8	×

x	y	z
2	3	33
	4	$\frac{38}{3}$
	5	$\frac{43}{5}$
	6	$\frac{48}{7}$
	7	×

x	y	z
3	3	12
	4	$\frac{39}{5}$
	5	6
	6	×
4	4	$\frac{40}{7}$
	5	×

x	y	z
5	5	×
6	6	
7	7	
8	8	

×は$y > z$となり不適

以上より、求める自然数は$(x, y, z) = (1,4,37), (2,3,33), (3,3,12), (3,5,6)$です。

問題2　与式を変形すると、

$$(m+n+3)(m^2+n^2-nm-3m-3n+9)=p$$

となりますが、pが素数で、$m+n+3\neq 1$ですから、

$$m^2+n^2-nm-3m-3n+9=1\cdots①$$

です。左辺を平方完成すると、

$$\frac{(m-n)^2}{2}+\frac{(m-3)^2}{2}+\frac{(n-3)^2}{2}=1\cdots②$$

となりますが、$m>4$または$n>4$なら、第 2 項>1または第 3 項>1なので、$m\leq 4$かつ$n\leq 4$でないと都合が悪いです。ケース数が少ないので、この範囲を総当たりするのが手っ取り早いです。試験ならそうしますが、少しだけ論理的にやってみました。$m=n$と$m\neq n$に場合分けします。数式がシンメトリなので、$m\neq n\Rightarrow m<n$として構わないと思います。

⑴ $m=n$の場合

②式は、

$$(m-3)(m-n)+(n-4)(n-2)=0$$

とも変形できるので、$m=n=2,4$が②式の解になります。このとき$p=7,11$となります。

⑵ $m<n$の場合

②式の第 1 項≤ 1を満たすには、$n=m+1$でなければなりません。つまり、

$$\frac{\{m-(m+1)\}^2}{2}+\frac{(m-3)^2}{2}+\frac{\{(m+1)-3\}^2}{2}=1\Rightarrow m=2,3$$

となりますが、$m=2$のとき$(n,p)=(3,8)$、$m=3$のとき$(n,p)=(4,10)$となって、不都合です。

以上より、求める組みは$(m,n,p)=(2,2,7),(4,4,11)$です。

問題3　直接x, yを求めて$x+y$を計算する問題ではなさそうなので、次のようにやりました。
2024/06/03 赤字部分を追記

$$(x+1)(y+1)(x+y)=300 \Rightarrow (x+y)(x+y+xy+1)=300 \cdots ①$$

$$x^3+y^3=99 \Rightarrow (x+y)\{(x+y)^2-3xy\}=99 \cdots ②$$

と与式を変形して、$x+y=A, xy=B$とすると、

$$A(A+B+1)=300 \cdots ③$$

$$A(A^2-3B)=99 \cdots ④$$

です。ここで、$A \neq 0$なので、③式より、

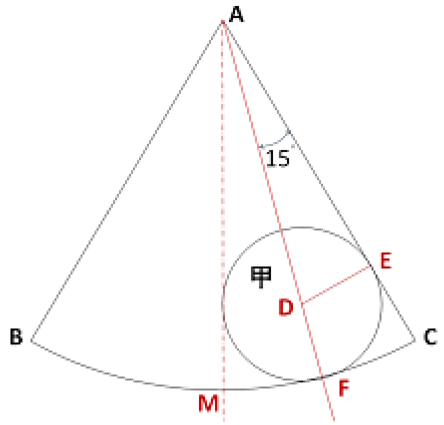
$$B=\frac{300-A^2-A}{A}$$

とやって、④式に代入して、

$$A\left(A^2-3\frac{300-A^2-A}{A}\right)=99 \Rightarrow (A-9)\{(A+6)^2+75\}=0 \Rightarrow A=9, \boldsymbol{-6 \pm 5\sqrt{3}i}$$

です。
以上より、$x+y=9$, $\boldsymbol{-6 \pm 5\sqrt{3}i}$となります。

追加問題1



左図のように、弧 BCの中点をM、甲の中心DからAC、BCに垂直に下した点をそれぞれE、Fとします。

AFは∠CAMの二等分線なので、∠CAF $= 15°$です。甲の半径をr_Kとすると、

$$AD = \frac{DE}{\sin 15°} = \frac{r_K}{\sin 15°}$$

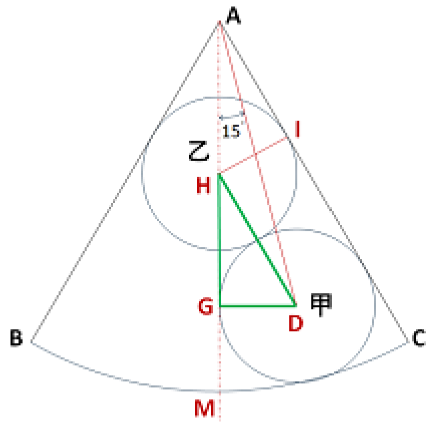
なので、

$$AF = AD + DF = \frac{r_K}{\sin 15°} + r_K$$

です。ここで、$AF = 1$なので（$\sin 15°$の値は補足を参照）、

$$\frac{r_K}{\sin 15°} + r_K = 1 \Rightarrow r_K = 3\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 7$$

です。



次に、甲の中心DからAMに垂直に下した点をG、乙の中心HからACに垂直に下した点をI、そして、乙の半径をr_Oとすると、

$$AH = \frac{HI}{\sin 30°} = \frac{r_O}{\sin 30°}$$

また、

$$AG = \frac{DG}{\tan 15°} = \frac{r_K}{\tan 15°}$$

なので、

$$HG = AG - AH = \frac{r_K}{\tan 15°} - \frac{r_O}{\sin 30°}$$

です。⊿DGHに三平方の定理を適用すると（$\tan 15°$の値は補足を参照）、

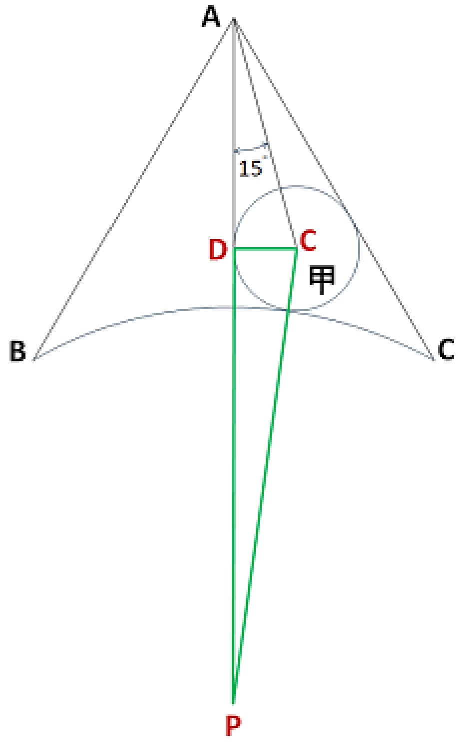
$$DG^2 + GH^2 = DH^2 \Rightarrow {r_K}^2 + \left(\frac{r_K}{\tan 15°} - \frac{r_O}{\sin 30°}\right)^2 = (r_K + r_O)^2$$

$$\Rightarrow (r_O - r_K)\left\{3r_O - \left(4\sqrt{3} + 7\right)r_K\right\} = 0 \Rightarrow r_O = r_K, \frac{(4\sqrt{3} + 7)}{3} r_K$$

となりますが、$\frac{(4\sqrt{3}+7)}{3} = 4.6\cdots$なので、後者は不適です。

以上より、甲円、乙円の半径は共に$3\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 7$です。

追加問題2



左図のように、弧 BCの中心をP、甲の中心CからAPに垂直に下した点をDとします。甲の半径をr_Kとすると、

$$AD = \frac{CD}{\tan 15°} = \frac{r_K}{\tan 15°}$$

なので、

$$DP = AP - AD = \sqrt{3} - \frac{r_K}{\tan 15°}$$

です。⊿CDPに三平方の定理を適用すると(tan 15°の値は補足を参照)、

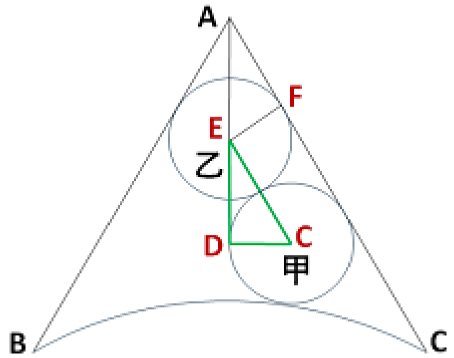
$$CD^2 + DP^2 = CP^2$$

$$\Rightarrow {r_K}^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{r_K}{\tan 15°}\right)^2 = (1 + r_K)^2$$

$$\Rightarrow {r_K}^2 + (4\sqrt{3} - 8)r_K - 8\sqrt{3} + 14$$

$$\Rightarrow r_K = 4 - 2\sqrt{3} \pm \left(2\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$$

ここで、$r_K < \frac{1}{2}$なので、$r_K = 4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$が適切です。



次に、乙の中心EからACに垂直に下した点をFとします。乙の半径をr_Oとすると、

$$AE = \frac{EF}{\sin 30°} = \frac{r_O}{\sin 30°}$$

なので、

$$DE = AD - AE = \frac{r_K}{\tan 15°} - \frac{r_O}{\sin 30°}$$

です。

⊿CDEに三平方の定理を適用すると、

$$CD^2 + DE^2 = CE^2 \Rightarrow {r_K}^2 + \left(\frac{r_K}{\tan 15°} - \frac{r_O}{\sin 30°}\right)^2 = (r_K + r_O)^2$$

$$\Rightarrow (r_O - r_K)\left\{3r_O - \left(4\sqrt{3} + 7\right)r_K\right\} = 0 \Rightarrow r_O = r_K, \frac{(4\sqrt{3} + 7)}{3} r_K$$

となりますが、$\frac{(4\sqrt{3}+7)}{3} = 4.6 \cdots$なので、後者は不適です。

以上より、甲円、乙円の半径は共に$4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$です。

補足 $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \tan 15^\circ$について

加法定理を使って、

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

です。また、

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = 2 - \sqrt{3}$$

です。