● 問題 442 解答＜三角定規＞

[問題1] 自然数 $0<x\leqq y\leqq z$ に対し $2(xy+yz+zx)=9(x+y+z)$ …①

①において $y=z=x$ と置くと $6x^2=27x$ ∴ $x=\dfrac{9}{2}$ ∴ $x\leqq 4$ …②

①を変形し $2yz+2x(y+z)=9x+9(y+z)$ ∴ $2yz+(2x-9)(y+z)=9x$

∴ $(2y+2x-9)(2z+2x-9)=18x+(2x-9)^2=4x^2-18x+81$ …③

(ⅰ) $x=1$ のとき ③より $(2y-7)(2z-7)=67$

$y\leqq z$ より $(2y-7,\ 2z-7)=(1,\ 67)$ ∴ $(y,\ z)=(4,\ 37)$

(ⅱ) $x=2$ のとき ③より $(2y-5)(2z-5)=61$

$y\leqq z$ より $(2y-5,\ 2z-5)=(1,\ 61)$ ∴ $(y,\ z)=(3,\ 33)$

(ⅲ) $x=3$ のとき ③より $(2y-3)(2z-3)=63$

$y\leqq z$ より $(2y-3,\ 2z-3)=(1,\ 63),\ (3,\ 21),\ (7,\ 9)$ ∴ $(y,\ z)=(2,\ 33),\ (3,\ 12),\ (5,\ 6)$

このうち $x\leqq y$ より $(y,\ z)=(2,\ 33)$ は不適。

(ⅳ) $x=4$ のとき ③より $(2y-1)(2z-1)=73$

$y\leqq z$ より $(2y-1,\ 2z-1)=(1,\ 73)$ ∴ $(y,\ z)=(1,\ 37)$, これは $x\leqq y$ に不適。

以上より，求める①の自然数解は $(x,\ y,\ z)=\mathbf{(1,\ 4,\ 37),\ (2,\ 3,\ 33),\ (3,\ 3,\ 12),\ (3,\ 5,\ 6)}$ …[答]

［問題２］

m, n : 正整数, p : 素数, $m^3+n^3-9mn=p-27$ …①

①を変形し， $m^3+n^3+3^3-3\cdot 3mn=(m+n+3)(m^2+n^2+3^2-mn-3m-3n)=p$ …②

p は素数で $m+n+3>1$ だから， $m+n+3=p$ …③, $m^2+n^2+9-mn-3m-3n=1$ …④

④より $(m-n)^2+(m-3)^2+(n-3)^2=2$ …④′

$m\neq n$ のとき, ④′より $m-n=\pm 1$ で, このとき $(m, n)=(3, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 4)$ が④′を満たすが,
これらは全て $m+n+3$ が素数にならないため不適。

$m=n$ のとき④′より $m=n=2,\ 4$ で, このとき $p=m+n=7,\ 11$

以上より，求める組は $(m,\ n,\ p)=\mathbf{(2,\ 2,\ 7),\ (4,\ 4,\ 11)}$ …[答]

［問題３］

$(1+x)(1+y)(x+y)=(1+x+y+xy)(x+y)=300$ …①

$x^3+y^3=99$ …②

$x+y=u,\ xy=v$ と置くと，①②は

$(1+u+v)u=300$ …③

$u^3+3uv=99$ …④

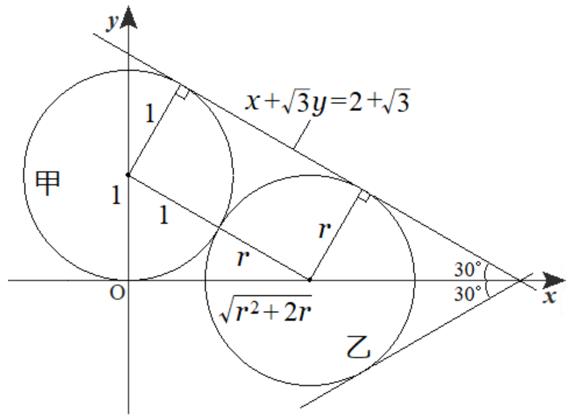
③④から v を消去して整理すると

$u^3+3u^2+3u-999=(u-9)(u^2+12u+111)=0$ …⑤

⑤を解いて， $u=x+y=\mathbf{9},\ \mathbf{-6\pm 5\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}}$ …[答]

《追加問題》

［１］［２］ともに題意のような 60° の内角内に 3 円が配置されるとき, 甲・乙両円の半径が等しいことを示す。



右図のように座標軸・座標を定め 2 円を配置する。

甲円の半径を 1, 乙円の半径を r とする。題意が成り立つためには $r=1$ であることを示す。

甲円に接し, x 軸と交角 30° をなす直線は

$$x+\sqrt{3}\,y=2+\sqrt{3} \quad \cdots①$$

乙円の中心座標は $(\sqrt{r^2+2r},\ 0)$ …②

①②両者の距離は d は $d=\dfrac{|\sqrt{r^2+2r}-2-\sqrt{3}\,|}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^{\,2}}}=\dfrac{1}{2}|\sqrt{r^2+2r}-2-\sqrt{3}\,|$

題意が成り立つとき $d=r$ であるから

$$\sqrt{r^2+2r}-2-\sqrt{3}=\pm\ 2r$$

複号が＋のとき，平方して整理すると　$3r^2+2(3+2\sqrt{3})r+7+4\sqrt{3}=0$

これは r の正の解をもたないため不適。

複号が－のとき，平方して整理すると　$3r^2-2(5+2\sqrt{3})r+7+4\sqrt{3}=(r-1)(3r-7-4\sqrt{3})=0$

$r=\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3}$ は明らかに不適だから　$r=1$。

以上で，甲・乙両円の半径が等しいことが示された。…［証明了］

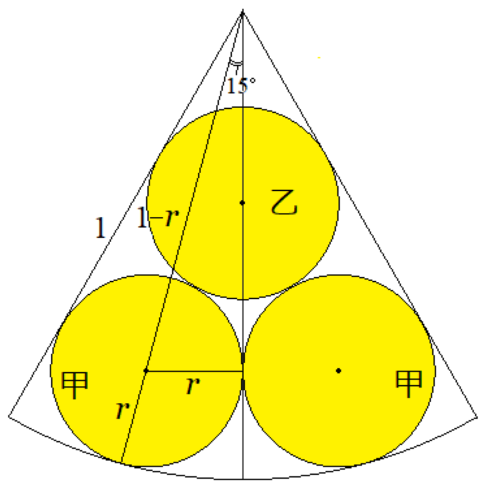
［１］ 求める半径を r とすると, 右図より

$$r=(1-r)\sin 15^\circ$$

$$\therefore\ r=\frac{\sin 15^\circ}{1+\sin 15^\circ}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4}{1+(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\cdots$$

$$=3\sqrt{6}+4\sqrt{3}-5\sqrt{2}-7 \quad (=0.2056\cdots)$$



以上より, 求める両円の半径は

$3\sqrt{6}+4\sqrt{3}-5\sqrt{2}-7$　$(=0.2056\cdots)$　…［答］

［２］求める半径を r とすると, 右図より

$$(1+r)^2=r^2+\left(\sqrt{3}-\frac{r}{\tan 15^\circ}\right)^2$$

$$\frac{1}{\tan 15^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$$ を用いて変形･整理すると

$$r^2-4(2-\sqrt{3})r+14-8\sqrt{3}=0$$

$$\therefore \quad r=2(2-\sqrt{3})+2\sqrt{2}-\sqrt{6}=0.9148\cdots$$

$$\text{or}\quad r=2(2-\sqrt{3})-2\sqrt{2}+\sqrt{6}=0.1569\cdots$$

となるが, 前者は明らかに不適である。

以上より, 求める両円の半径は

$$\mathbf{4+\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\quad(=0.1569\cdots)\quad\cdots[答]$$