第 443 回

問題　1996 年の京都大学の問題および類題

次の問いに答えよ。

(1)　$\cos 5\theta = f(\cos\theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

(2)　$\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{3\pi}{10}\cos\dfrac{7\pi}{10}\cos\dfrac{9\pi}{10}$ の値を求めよ。

(3)　$\cos 7\theta = f(\cos\theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

(4)　$\cos\dfrac{\pi}{14}\cos\dfrac{3\pi}{14}\cos\dfrac{5\pi}{14}\cos\dfrac{9\pi}{14}\cos\dfrac{11\pi}{14}\cos\dfrac{13\pi}{14}$ の値を求めよ。

(5)　$\theta = \dfrac{\pi}{2(2n+1)}$ とおいて，$\cos\theta\cos 3\theta\cos 5\theta\cdots\cos(4n+1)\theta$ の値を類推せよ。

　ただし，$\cos(2n+1)\theta$ は除く。

解答

(1)　2 倍角，3 倍角の公式は既知とする。

$\cos 5\theta = \cos 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta\sin 2\theta = (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$\qquad = (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - 2\cos\theta\{3(1-\cos^2\theta) - 4(1-\cos^2\theta)^2\}$

$\qquad = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

ここで，$\cos\theta = x$ とおくと，$\cos 5\theta = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

よって，$f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$　答

(2)　(1) で，$f(x) = 0$ とおくと，$x = 0$，$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ …①

①の 4 個の解の積は，解と係数の関係から，$\dfrac{5}{16}$

一方，$\cos 5\theta = 0$ とおくと，$5\theta = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ （n は整数）　$\therefore \theta = \dfrac{4n\pm 1}{10}\pi$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲の解は，$\theta = \dfrac{\pi}{10}$，$\dfrac{3\pi}{10}$，$\dfrac{5\pi}{10}$，$\dfrac{7\pi}{10}$，$\dfrac{9\pi}{10}$

この中で，$\theta = \dfrac{5\pi}{10}$ のとき，$\cos\dfrac{5\pi}{10} = 0$ であるから，これを除く，$\cos\dfrac{\pi}{10}$，$\cos\dfrac{3\pi}{10}$，$\cos\dfrac{7\pi}{10}$，$\cos\dfrac{9\pi}{10}$ は，

①の 4 個の解となるから，$\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{3\pi}{10}\cos\dfrac{7\pi}{10}\cos\dfrac{9\pi}{10} = \dfrac{5}{16}$　答

(3)　(1) の 5 倍角の公式 $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ において，θ を $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ に置き換えると，

$\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$ である。

$\cos 7\theta = \cos 5\theta\cos 2\theta - \sin 5\theta\sin 2\theta$

$\qquad = (16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta)\cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$\qquad = (16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - 2\cos\theta\{16(1-\cos^2\theta)^3 - 20(1-\cos^2\theta)^2 + 5(1-\cos^2\theta)\}$

$\qquad = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$

ここで，$\cos\theta = x$ とおくと，$\cos 7\theta = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

よって，$f(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$　答

(4) (1)で，$f(x)=0$ とおくと，$x=0$，$64x^6-112x^4+56x^2-7=0$ …②

②の4個の解の積は，解と係数の関係から，$\dfrac{-7}{64}=-\dfrac{7}{64}$

一方，$\cos 7\theta=0$ とおくと，$7\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$（$n$ は整数） $\therefore \theta=\dfrac{4n\pm 1}{14}\pi$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲の解は，$\theta=\dfrac{\pi}{14}$，$\dfrac{3\pi}{14}$，$\dfrac{5\pi}{14}$，$\dfrac{7\pi}{14}$，$\dfrac{9\pi}{14}$，$\dfrac{11\pi}{14}$，$\dfrac{13\pi}{14}$

この中で，$\theta=\dfrac{7\pi}{14}$ のとき，$\cos\dfrac{7\pi}{10}=0$ であるから，

これを除く，$\cos\dfrac{\pi}{14}$，$\cos\dfrac{3\pi}{14}$，$\cos\dfrac{5\pi}{14}$，$\cos\dfrac{9\pi}{14}$，$\cos\dfrac{11\pi}{14}$，$\cos\dfrac{13\pi}{14}$ は，②の6個の解となるから，

$\cos\dfrac{\pi}{14}\cos\dfrac{3\pi}{14}\cos\dfrac{5\pi}{14}\cos\dfrac{9\pi}{14}\cos\dfrac{11\pi}{14}\cos\dfrac{13\pi}{14}=-\dfrac{7}{64}$ 答

(5) $\theta=\dfrac{\pi}{2(2n+1)}$ のとき，$\cos\theta\cos 3\theta\cos 5\theta\cdots\cos(4n+1)\theta=c_n$ とおく。ただし，$\cos(2n+1)$ は除く。

[1] $n=1$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で，$c_1=\cos\theta\cos 5\theta=\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{2\cdot 1+1}{2^{2\cdot 1}}$

[2] $n=2$ のとき，$c_2=\dfrac{5}{16}=(-1)^2\cdot\dfrac{2\cdot 2+1}{2^{2\cdot 2}}$

[3] $n=3$ のとき，$c_3=-\dfrac{7}{64}=(-1)^3\cdot\dfrac{2\cdot 3+1}{2^{2\cdot 3}}$

よって，$c_n=(-1)^n\cdot\dfrac{2n+1}{2^{2n}}$ と類推される。 答

証明

(2)，(4) のように計算すると，求める式の値は，$\cos(2n+1)\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表したとき，解と係数の関係から，

$\dfrac{\cos\theta\text{ の係数}}{\cos^{2n+1}\theta\text{ の係数}}$ である。

数学公式集II（森口繁一他著，岩波全書，P.187）に掲載されている $\cos n\theta=\displaystyle\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^r n}{2(n-r)}{}_{n-r}C_r(2\cos\theta)^{n-2r}$ について，n を $2n+1$ に置き換えると，$\cos(2n+1)\theta=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r(2n+1)}{2(2n+1-r)}{}_{2n+1-r}C_r(2\cos\theta)^{2n+1-2r}$

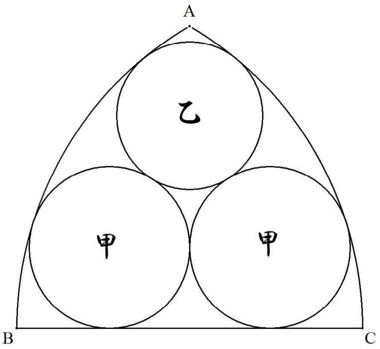
$\cos^{2n+1}\theta$ の係数（$r=0$ のとき）：$\dfrac{2n+1}{2(2n+1)}2^{2n+1}=2^{2n}$

$\cos\theta$ の係数（$r=n$ のとき）：$\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{2(n+1)}{}_{n+1}C_n\cdot 2=(-1)^n(2n+1)$

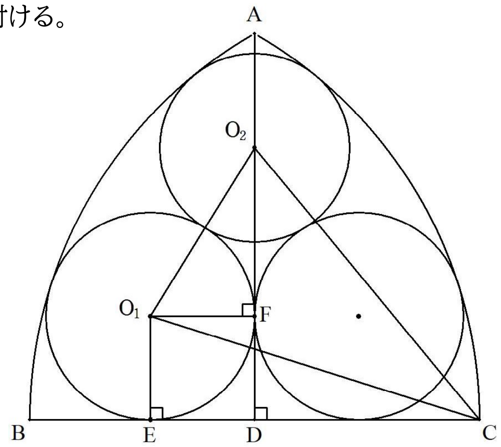
よって，$\dfrac{\cos\theta\text{ の係数}}{\cos^{2n+1}\theta\text{ の係数}}=\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{2^{2n}}$ 終

追加問題 1

A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 CA，弧AB は半径１の円弧である。
BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に互いに
接する甲円２個と乙円１個を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_1EC$ について，$O_1E= r_1$，$EC= r_1+\dfrac{1}{2}$，$CO_1= 1-r_1$ であるから，

三平方の定理により，$r_1{}^2+\left(r_1+\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-r_1)^2$

$r_1{}^2+3r_1-\dfrac{3}{4}=0$　…①　$r_1=\dfrac{-3\pm2\sqrt{3}}{2}$

$r_1>0$ より，$r_1=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2}$　（$\fallingdotseq 0.232051$）

次に，$\triangle O_2O_1F$ について，$O_2O_1= r_1+r_2$，$O_1F= r_1$ であるから，

三平方の定理により，$O_2F=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_1{}^2}=\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$

従って，$\triangle O_2DC$ について，$O_2D=O_2F+FD=\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}+r_1$，$DC=\dfrac{1}{2}$，$CO_2= 1-r_2$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}+r_1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-r_2)^2$

展開して移項すると，$2r_1\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}=\dfrac{3}{4}-r_1{}^2-2(1+r_1)r_2$

両辺を２乗して r_2 について整理すると，$4(1+2r_1)r_2{}^2-(3+3r_1-4r_1{}^2+4r_1{}^3)r_2+\left(\dfrac{3}{4}-r_1{}^2\right)^2=0$　…②

①より，$3+3r_1-4r_1{}^2+4r_1{}^3=\left(r_1{}^2+3r_1-\dfrac{3}{4}\right)(4r_1-16)+54r_1-9=9(6r_1-1)$，

$\left(\dfrac{3}{4}-r_1{}^2\right)^2=(3r_1)^2=9\left(\dfrac{3}{4}-3r_1\right)=\dfrac{27}{4}(1-4r_1)$ であるから，

②は，$4(1+2r_1)r_2{}^2-9(6r_1-1)r_2+\dfrac{27}{4}(1-4r_1)=0$

両辺に $\dfrac{4}{9}$ を掛け，変形すると，$(1+2r_1)\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)^2-3(6r_1-1)\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)+3(1-4r_1)=0$

$r_1=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ を代入すると，$2(\sqrt{3}-1)\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)^2-6(3\sqrt{3}-5)\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)+3(7-4\sqrt{3})=0$

両辺に $(\sqrt{3}+1)$ を掛けると，$4\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)^2-12(2-\sqrt{3})\left(\dfrac{4r_2}{3}\right)+3(-5+3\sqrt{3})=0$

$\therefore\left(\dfrac{8r_2}{3}\right)^2-6(2-\sqrt{3})\left(\dfrac{8r_2}{3}\right)+3(-5+3\sqrt{3})=0$

$\frac{8r_2}{3}=3(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{\{-3(2-\sqrt{3})\}^2-3(-5+3\sqrt{3})}=3(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{78-45\sqrt{3}}$

ここで，$78-45\sqrt{3}=\frac{3(52-2\sqrt{15^2\cdot 3})}{2}=\frac{3(3\sqrt{3}-5)^2}{2}=\left(\frac{9\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{2}\right)^2$ であるから，

$\frac{8r_2}{3}=3(2-\sqrt{3})\pm\frac{9\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{2}$ $\quad\therefore r_2=\frac{3\{6(2-\sqrt{3})\pm(9\sqrt{2}-5\sqrt{6})\}}{16}$

ここで，$\frac{3\{6(2-\sqrt{3})-(9\sqrt{2}-5\sqrt{6})\}}{16}\fallingdotseq 0.21$，$\frac{3\{6(2-\sqrt{3})+(9\sqrt{2}-5\sqrt{6})\}}{16}\fallingdotseq 0.39$ であるから，

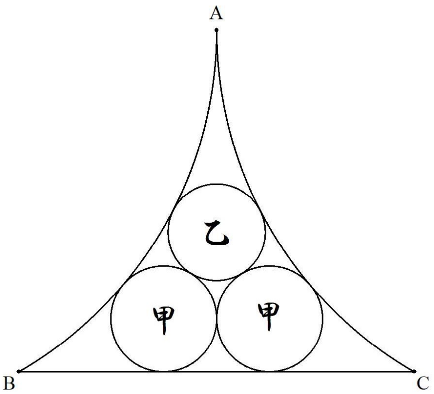
題意に適するのは，$r_2=\frac{36-27\sqrt{2}-18\sqrt{3}+15\sqrt{6}}{16}$ （$\fallingdotseq 0.211354$）

よって，求める甲乙円の半径は，

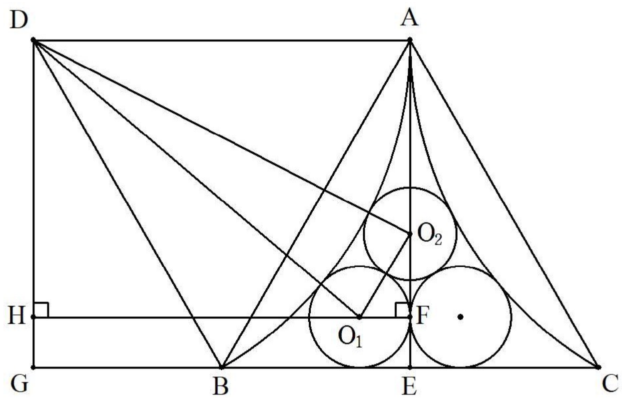
甲：$\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$，乙：$\frac{36-27\sqrt{2}-18\sqrt{3}+15\sqrt{6}}{16}$ 答

追加問題 2

A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，
弧 CA，弧AB は半径 1 の円弧である。
BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に互いに
接する甲円 2 個と乙円 1 個を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，
図のように記号を付ける。



$\triangle DHO_1$ について，

$DH=\frac{\sqrt{3}}{2}-r_1$，$HF=1$，$O_1D=1+r_1$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-r_1\right)^2+(1-r_1)^2=(1+r_1)^2$

$r_1{}^2-(4+\sqrt{3})r_1+\frac{3}{4}=0$

$r_1=\frac{4+\sqrt{3}\pm\sqrt{(4+\sqrt{3})^2-3}}{2}=\frac{4+\sqrt{3}\pm 2(\sqrt{3}+1)}{2}$

$r_1<\frac{1}{4}$ より，$r_1=\frac{4+\sqrt{3}-2(\sqrt{3}+1)}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ （$\fallingdotseq 0.13397$）

次に，$\triangle O_2O_1F$ について，$O_2O_1=r_1+r_2$，$O_1F=r_1$ であるから，

三平方の定理により，$O_2F=\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_1{}^2}=\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$

$\triangle O_2AD$ について，$O_2A=EA-EF-FO_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-r_1-\sqrt{2r_1r_2+r_2{}^2}$，$AD=1$，$DO_2=1+r_2$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1-\sqrt{2r_1r_2+{r_2}^2}\right)^2+1^2=(1+r_2)^2$

展開して移項すると，$\dfrac{3}{4}-\sqrt{3}\,r_1+{r_1}^2-2(1-r_1)r_2=(\sqrt{3}-2r_1)\sqrt{2r_1r_2+{r_2}^2}$

$r_1=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ を代入すると，$2(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}\,r_2=2(\sqrt{3}-1)\sqrt{(2-\sqrt{3})r_2+{r_2}^2}$

両辺を2乗して r_2 について整理すると，$(-13+8\sqrt{3})\,{r_2}^2-4(11-6\sqrt{3})r_2+4(7-4\sqrt{3})=0$

両辺に $(13+8\sqrt{3})$ を掛けると，$23{r_2}^2-4(-1+10\sqrt{3})r_2+4(-5+4\sqrt{3})=0$

この 2 次方程式の判別式を D とおくと，

$\dfrac{D}{4}=\{-2(-1+10\sqrt{3})\}^2-23\cdot 4(-5+4\sqrt{3})=64(26-7\sqrt{3})=\{4(7\sqrt{2}-\sqrt{6})\}^2$ より，

$r_2=\dfrac{2(-1+10\sqrt{3})\pm 4(7\sqrt{2}-\sqrt{6})}{23}=\dfrac{2\{-1+10\sqrt{3}\pm 2(7\sqrt{2}-\sqrt{6})\}}{23}$

ここで，$\dfrac{2\{-1+10\sqrt{3}-2(7\sqrt{2}-\sqrt{6})\}}{23}\fallingdotseq 0.12$，$\dfrac{2\{-1+10\sqrt{3}+2(7\sqrt{2}-\sqrt{6})\}}{23}\fallingdotseq 2.7$ であるから，

題意に適するのは，$r_2=\dfrac{2(-1-14\sqrt{2}+10\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{23}$ （$\fallingdotseq 0.123522$ ）

よって，求める甲乙円の半径は，

甲：$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$，乙：$\dfrac{2(-1-14\sqrt{2}+10\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{23}$ ㊟

（2024/6/23，6/30訂正　ジョーカー）