

問題1

(2) 2024/07/06 追記

$\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{5\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}$ のとき、 $\cos(5\theta) = 0$ なので、

$$f(\cos(\theta)) = 0 \text{ の解は } \cos\left(\frac{\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$$

ですが、5 つすべてが異なるので、これ以外に解はありません。また、

$$f(\cos(\theta)) = \cos(\theta) \{16 \cos^4(\theta) - 20 \cos^2(\theta) + 5\}$$

と因数分解できますから、

$$\cos(\theta) = 0 = 0 \text{ の解は、 } \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 0$$

$$16 \cos^4(\theta) - 20 \cos^2(\theta) + 5 = 0 \text{ の解は、 } \cos\left(\frac{\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$$

です。与式は後者の積なので、解と係数の関係より、

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \frac{5}{16}$$

です。

(4) 2024/07/06 追記

$\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}, \frac{7\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}, \frac{11\pi}{14}, \frac{13\pi}{14}$ のとき、 $\cos(7\theta) = 0$ なので、

$$f(\cos(\theta)) = 0 \text{ の解は } \cos\left(\frac{\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{11\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)$$

ですが、7 つすべてが異なるので、これ以外に解はありません。また、

$$f(\cos(\theta)) = \cos(\theta) \{64 \cos^6(\theta) - 112 \cos^4(\theta) + 56 \cos^2(\theta) - 7\}$$

と因数分解できますから、

$$\cos(\theta) = 0 = 0 \text{ の解は、 } \cos\left(\frac{7\pi}{14}\right) = 0$$

$$64 \cos^6(\theta) - 112 \cos^4(\theta) + 56 \cos^2(\theta) - 7 = 0 \text{ の解は、}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{11\pi}{14}\right), \cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)$$

です。与式は後者の積なので、解と係数の関係より、

$$\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{11\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{13\pi}{14}\right) = -\frac{7}{64}$$

です。