● 問題 443 解答＜三角定規＞

［問題］

(1) $x=\cos\theta$ とおくとき $\cos n\theta=f(\cos\theta)$ を満たす x の多項式を $f_n(x)$ とする。

$f_n(x)$ について，次の漸化式が成り立つ。

$f_1(x)=x,\ f_2(x)=2x^2-1,\ f_{n+2}=2xf_{n+1}-f_n$ …①

［証明］ $\cos(n+2)\theta=\cos\{(n+1)\theta+\theta\}=\cos(n+1)\theta\cos\theta-\sin(n+1)\theta\sin\theta$

$=\cos(n+1)\theta\cos\theta-\sin n\theta\cos\theta\sin\theta-\cos n\theta\sin^2\theta$

$=\cos(n+1)\theta\cos\theta-\sin n\theta\cos\theta\sin\theta-\cos n\theta(1-\cos^2\theta)$

$=\cos(n+1)\theta\cos\theta+(\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta)\cos\theta-\cos n\theta$

$=2\cos(n+1)\theta\cos\theta-\cos n\theta$

以上で，漸化式①が証明された。［了］

①を順に用いることにより

$f_3=2xf_2-f_1=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x$

$f_4=2xf_3-f_2=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)=8x^4-8x^2+1$

$f_5=2xf_4-f_3=2x(8x^4-8x^2+1)-(4x^3-3x)=\mathbf{16x^5-20x^3+5x}$ …[答]

(2) $\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(5\cdot\frac{5\pi}{10}\right)=\cos\left(5\cdot\frac{9\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\cos\left(5\cdot\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(5\cdot\frac{7\pi}{10}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}=0$ であるから

$x_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{10}$ $(i=1,2,3,4,5)$ は $f_5(x)=0$ の解であり，

$x_3=0$ だから $x_i\ (\neq 0)$ $(i=1,2,4,5)$ は $\frac{f_5(x)}{x}=16x^4-20x^2+5=0$ の異なる 4 解である。

よって，解と係数の関係より，$x_1x_2x_4x_5=\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{9\pi}{10}=\mathbf{\frac{5}{16}}$ …[答]

(3) (1)の f_5 に続き

$f_6=2xf_5-f_4=2x(16x^5-20x^3+5x)-(8x^4-8x^2+1)=32x^6-48x^4+18x^2-1$

$f_7=2xf_6-f_5=2x(32x^6-48x^4+18x^2-1)-(16x^5-20x^3+5x)=\mathbf{64x^7-112x^5+56x^3-7x}$ …[答]

(4) $\cos\left(7\cdot\frac{\pi}{14}\right)=\cos\left(7\cdot\frac{5\pi}{14}\right)=\cos\left(7\cdot\frac{9\pi}{14}\right)=\cos\left(7\cdot\frac{13}{14}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\cos\left(7\cdot\frac{3\pi}{14}\right)=\cos\left(7\cdot\frac{7\pi}{14}\right)=\cos\left(7\cdot\frac{11\pi}{14}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}=0$ であるから

$x_j=\cos\frac{(2j-1)\pi}{14}$ $(j=1,2,3,4,5,6,7)$ は $f_7(x)=0$ の解であり，

$x_4=0$ だから $x_j\ (\neq 0)$ $(i=1,2,3,5,6,7)$ は $\frac{f_7(x)}{x}=64x^6-112x^4+56x^2-7=0$ の異なる 6 解である。

よって，解と係数の関係より，$x_1x_2x_3x_5x_6x_7=\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}\cos\frac{9\pi}{10}\cos\frac{11\pi}{14}\cos\frac{13\pi}{14}=-\mathbf{\frac{7}{64}}$

…[答]

(5) 以上と同様に考えて，$\theta=\dfrac{\pi}{2(2n+1)}$ のとき $x_k=(2k-1)\theta=\dfrac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)}$ $(k=1,2,\cdots,n+1)$ はすべて

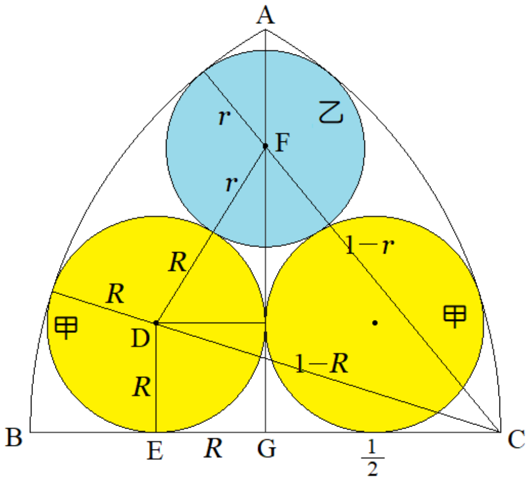
$\cos(2n+1)\theta=f_{2n+1}(x)=0$ の異なる解であり，$x_{(n+1)/2}=0$ を除く x_k $(\neq 0)$ $(k=1,2,\cdots,n+1)$ は

$\dfrac{f_{2n+1}(x)}{x}=4^n x^{2n}+\cdots+(-1)^n(2n+1)=0$ の解だから，解と係数の関係より

$x_1x_2x_3\cdot\cdots\cdot x_{n+1}=\cos\theta\cos3\theta\cos5\theta\cdot\cdots\cdot\cos(4n+1)\theta=\boldsymbol{(-1)^n\dfrac{2n+1}{4^n}}$ …[答]

《追加問題》

［問題１］右図のように各点を定める。



甲, 乙円の半径を R, r とする。

△CDE は直角三角形だから　$CD^2=DE^2+CE^2$

$\therefore\ (1-R)^2=R^2+\left(\dfrac{1}{2}+R\right)^2$

整理して　$4R^2+12R-3=0$

$R>0$ でこれを解いて　$R=$**甲円**$=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}}$　$(=0.232\cdots)$

…[答]

△CFG は直角三角形だから　$CF^2=FG^2+CG^2$

$\therefore\ (1-r)^2=\left(\sqrt{(r+R)^2-R^2}+R\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

R に上の値を代入し平方して整理すると

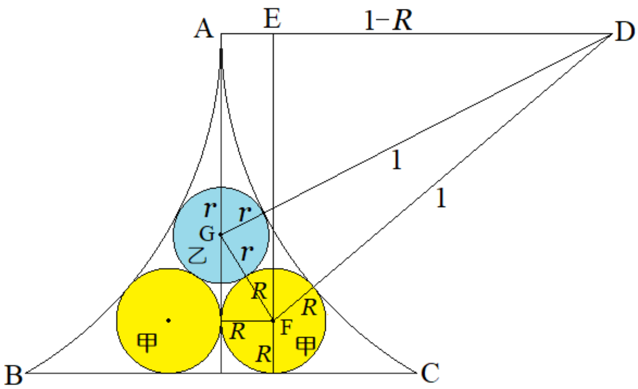
$64r^2-144(2-\sqrt{3})r-27(5-3\sqrt{3})=0$

$\therefore\ r=\dfrac{9(2-\sqrt{3})\pm3\sqrt{78-45\sqrt{3}}}{8}=\dfrac{3}{16}\{12-9\sqrt{2}\pm(6\sqrt{3}-5\sqrt{6})\}$

値を計算すると，複号が＋のとき $r=0.391\cdots$，－のとき $r=0.211\cdots$ で，前者は明らかに不適だから

$r=$**乙円**$=\boldsymbol{\dfrac{3}{16}(12-9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\sqrt{6})}$　$(=0.211\cdots)$ …[答]

［問題２］右図のように各点を定める。



甲, 乙円の半径を R, r とする。

△DEF は直角三角形だから　$DF^2=DE^2+EF^2$

$\therefore\ (1+R)^2=(1-R)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-R\right)^2$

整理して　$4R^2-4(4+\sqrt{3})R+3=0$

$\therefore\ R=\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2}=5.59\cdots,\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}=0.133\cdots$

前者は明らかに不適だから　$R=$**甲円**$=\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$　$(=0.133\cdots)$ …[答]

△ADG は直角三角形だから　$DG^2 = AD^2 + AG^2$

$$\therefore\ (1+r)^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - R - \sqrt{(R+r)^2 - R^2}\right)^2$$

R に上の値を代入し平方して整理すると

$$23r^2 - 4(10\sqrt{3} - 1)r + 4(4\sqrt{3} - 5) = 0$$

$$\therefore\ r = \frac{2}{23}(10\sqrt{3} - 1 \pm 4\sqrt{26 - 7\sqrt{3}}) = \frac{2}{23}\left(10\sqrt{3} - 1 \pm 2(7\sqrt{2} - \sqrt{6})\right)$$

値を計算すると，複号が＋のとき $r = 2.714\cdots$，－のとき $r = 0.123\cdots$ で，前者は明らかに不適だから

$$r = \text{乙円} = \mathbf{\frac{2}{23}\left(-1 - 14\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\right)} \quad (= 0.123\cdots) \quad \cdots[\text{答}]$$