第 444 回

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^2+(5-x)^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x+1}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^2 x\sin x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx$

解答

(1) $x-\dfrac{5}{2}=t$ とおくと，$x=\dfrac{5}{2}+t$　$dx=dt$

x	$2 \nearrow 3$
t	$-\frac{1}{2} \nearrow \frac{1}{2}$

与式$\displaystyle =\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{5}{2}+t\right)^2}{\left(\frac{5}{2}+t\right)^2+\left(\frac{5}{2}-t\right)^2}dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2+\frac{25}{4}+5t}{2t^2+\frac{25}{2}}dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{5t}{2t^2+\frac{25}{2}}\right)dt$

$\displaystyle =2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dt$ （∵）$\dfrac{1}{2}$ は偶関数，$\dfrac{5t}{2t^2+\frac{25}{2}}$ は奇関数より。

$=\dfrac{1}{2}$　答

(2) 与式$\displaystyle =\int_{-1}^0 \frac{x^2}{e^x+1}dx+\int_0^1 \frac{x^2}{e^x+1}dx$

前項で，$x=-t$ とおくと，

$\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_1^0 \frac{t^2}{e^{-t}+1}(-dt)=\int_0^1 \frac{t^2e^t}{e^t+1}dt$ であるから，変数 t を x に入れ換えると，前項$\displaystyle =\int_0^1 \frac{x^2e^x}{e^x+1}dx$

よって，与式$\displaystyle =\int_0^1 \frac{x^2e^x}{e^x+1}dx+\int_0^1 \frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$　答

(3) $\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと，$x=\dfrac{\pi}{2}-t$　$dx=-dt$

x	$0 \nearrow \pi$
t	$\frac{\pi}{2} \searrow -\frac{\pi}{2}$

与式$\displaystyle =\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos t}{1+\sin^2 t}(-dt)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\frac{\pi}{2}\cos t}{1+\sin^2 t}-\frac{t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)dt$

$\displaystyle =\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt$ （∵）$\dfrac{\frac{\pi}{2}\cos t}{1+\sin^2 t}$ は偶関数，$\dfrac{t\cos t}{1+\sin^2 t}$ は奇関数より。

$\displaystyle =\pi\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$ （∵）$\sin t=u$ とおいた。

$\displaystyle =\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2\theta\, d\theta}{1+\tan^2\theta}$ （∵）$u=\tan\theta$ とおいた。

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \dfrac{\pi^2}{4}$ 答

別解 部分積分法により，与式$=\left[-x\tan^{-1}(\cos x)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\tan^{-1}(\cos x)\,dx = -\pi\tan^{-1}(-1)+0=\dfrac{\pi^2}{4}$ 答

（∵）$\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと，$\int_0^{\pi}\tan^{-1}(\cos x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\tan^{-1}(\sin t)(-dt)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\tan^{-1}(\sin t)dt=0$

(4) (3)と同様に，$\dfrac{\pi}{2}-x=t$ とおくと，$x=\dfrac{\pi}{2}-t \quad dx=-dt$

x	$0 \nearrow \pi$
t	$\dfrac{\pi}{2} \searrow -\dfrac{\pi}{2}$

与式$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\sin^2 t\cos t(-dt)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}\sin^2 t\cos t - t\sin^2 t\cos t\right)dt$

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t\,dt$ （∵）$\dfrac{\pi}{2}\sin^2 t\cos t$ は偶関数，$t\sin^2 t\cos t$ は奇関数より。

$=\pi\int_0^1 u^2 du$ （∵） $\sin t=u$ とおいた。

$=\dfrac{\pi}{3}$ 答

(5) まず，$\log(1+\tan x)=\log\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}=\log\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x}=\dfrac{1}{2}\log 2+\log\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\log x$ より，

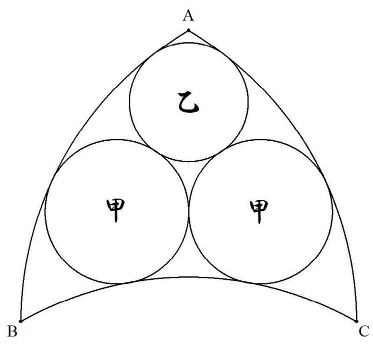
与式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}\log 2\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx$

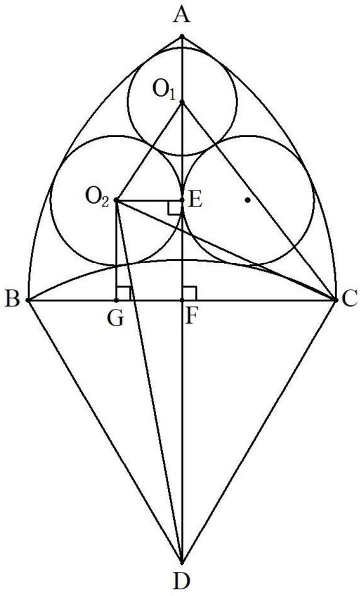
$=\dfrac{\pi\log 2}{8}$ 答

（∵）$\dfrac{\pi}{4}-x=t$ と置くと，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt$ となり，2項目と3項目が相殺される。

追加問題 1

A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧 BC，弧 CA，弧ABは半径1の円弧である。
弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に互いに
接する甲円2個と乙円1個を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。





解答　左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。
（△BCD は正三角形）

$\triangle O_2GC$ について，$GC = r_1 + \dfrac{1}{2}$，$CO2 = 1 - r_1$ であるから，

三平方の定理により，$O_2G = \sqrt{(1-r_1)^2 - \left(\dfrac{1}{2}+r_1\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3(1-4r_1)}}{2}$

$\triangle O_2DE$ について，$O_2D = 1 + r_1$，$O_2E = r_1$ であるから，

三平方の定理により，$ED = \sqrt{(1+r_1)^2 - {r_1}^2} = \sqrt{1+2r_1}$

また，$FD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

$O_2G = EF = ED - FD$ であるから，$\dfrac{\sqrt{3(1-4r_1)}}{2} = \sqrt{1+2r_1} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

両辺を２乗して整理すると，$\sqrt{3}\sqrt{1+2r_1} = 1 + 5r_1$

両辺を２乗して整理すると，$25{r_1}^2 + 4r_1 - 2 - 0$　$\therefore r_1 = \dfrac{-2 \pm 3\sqrt{6}}{25}$

$r_1 > 0$ より，$r_1 = \dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25}$　（$\fallingdotseq 0.213939$）

次に，$\triangle O_2O_1E$ について，$O_2O_1 = r_1 + r_2$，$O_1E = r_1$ であるから，

三平方の定理により，$O_2E = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - {r_1}^2} = \sqrt{2r_1r_2 + {r_2}^2}$

従って，$\triangle O_2FC$ について，

$O_2F = O_2E + ED - FD = \sqrt{2r_1r_2 + {r_2}^2} + \sqrt{1+2r_1} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$FC = \dfrac{1}{2}$，$CO_2 = 1 - r_2$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\sqrt{2r_1r_2+{r_2}^2} + \sqrt{1+2r_1} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = (1-r_2)^2$

展開して移項すると，$1 + 2r_1 - \sqrt{3}\sqrt{1+2r_1} + 2(1+r_1)r_2 = (\sqrt{3} - 2\sqrt{1+2r_1})\sqrt{2r_1r_2+{r_2}^2}$

両辺を２乗して r_2 について整理すると，$(-3 + 4{r_1}^2 + 4\sqrt{3}\sqrt{1+2r_1}){r_2}^2 + 2\{2 - r_1 - 4{r_1}^2 - 2\sqrt{3}(1-r_1)\sqrt{1+2r_1}\}r_2$
$-2(1+2r_1)(-2 - r_1 + \sqrt{3}\sqrt{1+2r_1}) = 0$

$r_1 = \dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25}$ を代入すると，$\sqrt{1+2r_1} = \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$ であるから，

$11(-13+132\sqrt{6}){r_2}^2 + 6(266 - 249\sqrt{6})r_2 + 18(29 - 6\sqrt{6}) = 0$

両辺に $13 + 132\sqrt{6}$ を掛けると，$1837{r_2}^2 - 6(310 - 51\sqrt{6})r_2 + 18(-7 + 6\sqrt{6}) = 0$

$r_2 = \dfrac{3(310-51\sqrt{6}) \pm 3\sqrt{3(45808 - 17888\sqrt{6})}}{1837} = \dfrac{3(310 \pm 156\sqrt{2} \mp 172\sqrt{3} - 51\sqrt{6})}{1837}$　（複号同順）

近似値を計算すると，

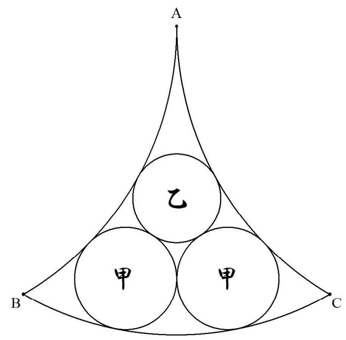
$\dfrac{3(310+156\sqrt{2}-172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837} \fallingdotseq 0.176$，$\dfrac{3(310-156\sqrt{2}+172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837} \fallingdotseq 0.428$

$r_2 < r_1$ であるから，$r_2 = \dfrac{3(310+156\sqrt{2}-172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}$　（$\fallingdotseq 0.176016$）

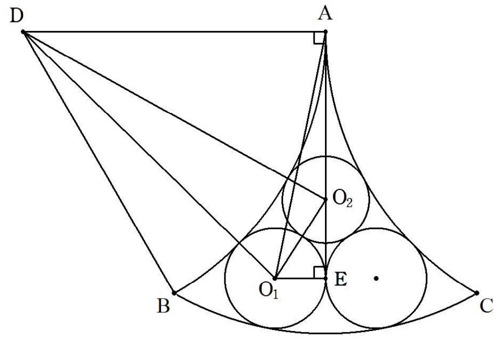
よって，求める甲乙円の半径は，甲：$\dfrac{-2+3\sqrt{6}}{25}$，乙：$\dfrac{3(310+156\sqrt{2}-172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}$　答

追加問題 2

A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，
弧 BC，弧 CA，弧AB は半径 1 の円弧である。
弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に互いに
接する甲円 2 個と乙円 1 個を内接させる。
甲円，乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　左側の甲円を $O_1(r_1)$，乙円を $O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。（△ADB は正三角形）



$\angle DAO_1=\alpha$，$\angle O_1AE=\beta$ とおくと，$\alpha+\beta=90^\circ$ である。

$\triangle ADO_1$ に余弦定理を適用して，

$$\cos\alpha=\frac{(1-r_1)^2+1^2-(1+r_1)^2}{2(1-r_1)\cdot 1}=\frac{1-4r_1}{2(1-r_1)}\quad\cdots①$$

$\triangle AO_1E$について，$AO_1=1-r_1$，$O_1E=r_1$ であるから，

三平方の定理により，$AE=\sqrt{(1-r_1)^2-{r_1}^2}=\sqrt{1-2r_1}$

$$\therefore\cos\beta=\frac{\sqrt{1-2r_1}}{1-r_1}=\sin\alpha\quad\cdots②$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に，①，②を代入すると，$\left(\dfrac{\sqrt{1-2r_1}}{1-r_1}\right)^2+\left\{\dfrac{1-2r_1}{2(1-r_1)}\right\}^2=1$

両辺に $4(1-r_1)^2$ を掛けると，$4(1-2r_1)+(1-2r_1)^2=4(1-r_1)^2$

整理すると，$12{r_1}^2-8r_1+1=0$　$\therefore r_1=\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{2}$

$0<r_1<\dfrac{1}{4}$ より，$r_1=\dfrac{1}{6}$（$=0.1\dot{6}$）

次に，$\triangle O_2O_1E$ について，$O_2O_1=r_1+r_2$，$O_1E=r_1$ であるから，

三平方の定理により，$O_2E=\sqrt{(r_1+r_2)^2-{r_1}^2}=\sqrt{2r_1r_2+{r_2}^2}$

従って，$\triangle DO_2A$ について，

$AO_2=AE-O_2E=\sqrt{1-2r_1}-\sqrt{2r_1r_2+{r_2}^2}$，$AD=1$，$DO_2=1+r_2$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\sqrt{1-2r_1}-\sqrt{2r_1r_2+{r_2}^2}\right)^2+1^2=(1+r_2)^2$

展開して移項すると，$1-2r_1-2(1-r_1)r_2=2\sqrt{1-2r_1}\sqrt{2r_1r_2+{r_2}^2}$

両辺を 2 乗して r_2 について整理すると，$4{r_1}^2{r_2}^2-4(1+r_1)(1-2r_1)r_2+(1-2r_1)^2=0$

$r_1=\dfrac{1}{6}$ を代入すると，${r_2}^2-28r_2+4=0$　$r_2=14\pm8\sqrt{3}$

題意に適するのは，$r_2=14-8\sqrt{3}$（≒ 0.143594）

よって，求める甲乙円の半径は，甲：$\dfrac{1}{6}$，乙：$14-8\sqrt{3}$　答

（2024/7/21　ジョーカー）