問題1

(1) 被積分関数を多項式の割り算と捉えると、

$$\frac{x^2}{x^2+(5-x)^2}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{10x-25}{2}}{x^2+(5-x)^2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4x-10}{x^2+(5-x)^2}$$

ですから、

$$与式=\int_2^3\left\{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4x-10}{x^2+(5-x)^2}\right\}dx=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\int_2^3\frac{4x-10}{x^2+(5-x)^2}dx$$

となり、第 2 項は、

$$\int_2^3\frac{4x-10}{x^2+(5-x)^2}dx=\int_2^3\frac{\{x^2+(5-x)^2\}'}{x^2+(5-x)^2}dx=[\log\{x^2+(5-x)^2\}]_2^3=0$$

なので、

$$与式=\frac{1}{2}$$

です。

(2) $t=-x$と変数変換すると、$dx=-dt$なので、

$$与式=\int_1^{-1}\frac{(-t)^2}{1+e^{-t}}(-dt)=\int_{-1}^1\frac{t^2}{1+e^{-t}}dt=\int_{-1}^1\frac{t^2e^t}{1+e^t}dt=\int_{-1}^1\frac{x^2e^x}{1+e^x}dx$$

です。上式は部分積分を使って、次のように変形できます。

$$与式=\int_{-1}^1\frac{x^2(1+e^x)'}{1+e^x}dx=\int_{-1}^1x^2\{\log(1+e^x)\}'dx$$

$$=[x^2\log(1+e^x)]_{-1}^1-2\int_{-1}^1x\log(1+e^x)\,dx=1-2\int_{-1}^1x\log(1+e^x)\,dx\cdots①$$

ここで、第 2 項の定積分をIとし、$t=-x$と変数変換すると、

$$I=\int_1^{-1}(-t)\log(1+e^{-t})\,(-dt)=-\int_{-1}^1t\log(1+e^{-t})\,dt$$

ですが、

$$\log(1+e^{-t})=\log\frac{1+e^t}{e^t}=\log(1+e^t)-\log e^t=\log(1+e^t)-t$$

なので、

$$I=-\int_{-1}^1t\{\log(1+e^t)-t\}dt=-\int_{-1}^1t\log(1+e^t)\,dt+\int_{-1}^1t^2\,dt=-I+\frac{2}{3}\Rightarrow I=\frac{1}{3}$$

です。これを①に当てはめて、

$$与式=1-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

です。

(3) 与式 $=\mathrm{I}$とし、$\mathrm{t}=\pi-\mathrm{x}$と変数変換すると、$\mathrm{dx}=-\mathrm{dt}$なので、

$$\mathrm{I}=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt)=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

です。補足1の公式を使って、

$$\mathrm{I}=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{(\cos t)'}{1+\cos^2 t}dt=-\frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1}(\cos t)\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$$

です。

(4) (3)と同じように、与式 $=\mathrm{I}$とし、$\mathrm{t}=\pi-\mathrm{x}$と変数変換すると、

$$\mathrm{I}=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\cos^2(\pi-t)\sin(\pi-t)(-dt)=\int_0^{\pi}(\pi-t)\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin t\,dt-\int_0^{\pi}t\cos^2 t\sin t\,dt=\pi\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin t\,dt-\mathrm{I}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin t\,dt=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(\cos t)^2(\cos t)'\,dt-\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{3}$$

です。

(5) (3)と同じように、与式 $=\mathrm{I}$とし、$\mathrm{t}=\frac{\pi}{4}-\mathrm{x}$と変数変換すると、

$$\mathrm{I}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right\}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right\}dt$$

です。ここで、

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$$

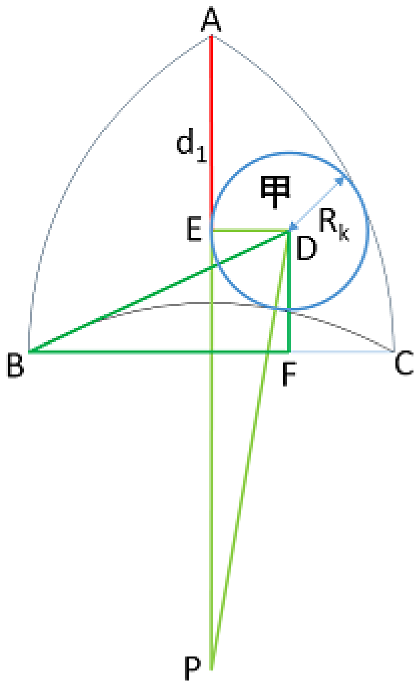
なので、

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\log 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan t)\,dt$$

$$=\frac{\pi\log 2}{4}-\mathrm{I}\Rightarrow \mathrm{I}=\frac{\pi\log 2}{8}$$

です。

追加問題1



左図のように、弧 BCの中心P、甲の中心DからAP, BCに垂直に下した点をそれぞれE, Fとします。そして、甲の半径をR_k、$AE = d_1$として、⊿DEPに三平方の定理を適用すると、

$$ED^2 + EP^2 = DP^2 \Rightarrow {R_k}^2 + \left(\sqrt{3} - d_1\right)^2 = (1 + R_k)^2 \cdots ①$$

です。また、⊿BDFにも三平方の定理を適用すると、

$$BF^2 + DF^2 = BD^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + R_k\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - d_1\right)^2 = (1 - R_k)^2 \cdots ②$$

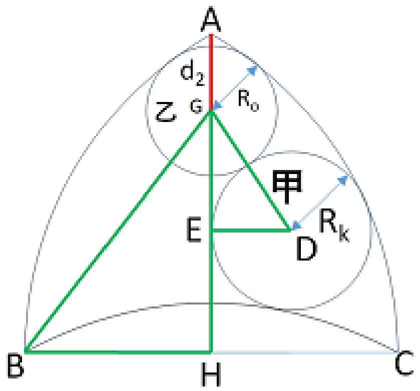
です。①②を解くと、

$$(R_k, d_1) = \left(\frac{3\sqrt{6} \pm 2}{25}, \frac{4\sqrt{3} \pm 3\sqrt{2}}{5}\right)$$

ですが、$d_1 < 1$なので、

$$(R_k, d_1) = \left(\frac{3\sqrt{6} - 2}{25}, \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{5}\right)$$

が適切です。



左図のように、乙の中心GからBCに垂直に下した点をHとします。そして、乙の半径をR_o、$AG = d_2$として、⊿BGHに三平方の定理を適用すると、

$$BH^2 + GH^2 = BG^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - d_2\right)^2 = (1 - R_o)^2 \cdots ③$$

です。また、⊿DEGにも三平方の定理を適用すると、

$$ED^2 + EG^2 = DG^2 \Rightarrow {R_k}^2 + (d_1 - d_2)^2 = (R_k + R_o)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{6} - 2}{25}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{5} - d_2\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{6} - 2}{25} + R_o\right)^2 \cdots ④$$

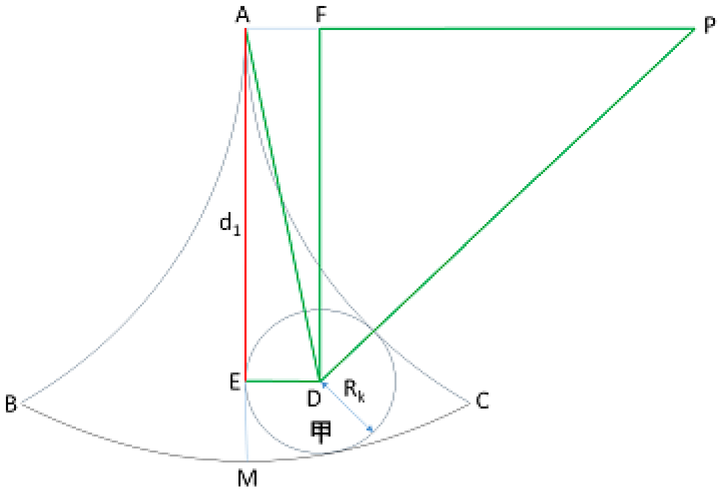
です。③④をR_oについて解くと、

$$R_o = \frac{468\sqrt{2} - 516\sqrt{3} \pm 153\sqrt{6} \mp 930}{1837}$$

ですが、$R_o > 0$なので、$R_o = \frac{468\sqrt{2} - 516\sqrt{3} - 153\sqrt{6} + 930}{1837}$が適切です。

以上より甲乙の半径は、それぞれ$\frac{3\sqrt{6} - 2}{25}$, $\frac{468\sqrt{2} - 516\sqrt{3} - 153\sqrt{6} + 930}{1837}$です。

追加問題2



左図のように、弧 ACの中心P、弧 BCの中点M、甲の中心DからAM, APに垂直に下した点をそれぞれE, Fとします。そして、甲の半径をR_k、$AE = d_1$として、⊿ADEに三平方の定理を適用すると、

$$AE^2 + DE^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow {d_1}^2 + {R_k}^2 = (1 - R_k)^2 \cdots ①$$

です。また、⊿DFPにも三平方の定理を適用すると、

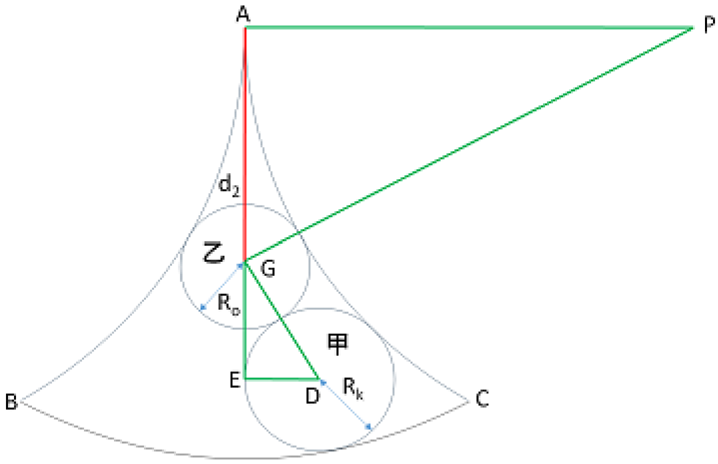
$$DF^2 + FP^2 = DP^2$$

$$\Rightarrow {d_1}^2 + (1 - R_k)^2 = (1 + R_k)^2 \cdots ②$$

です。①②を解いて、

$$(R_k, d_1) = \left(\frac{1}{6}, \pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

ですが、$d_1 > 0$なので、$(R_k, d_1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$が適切です。



左図のように、乙の中心G、半径をR_o、$AG = d_2$として、⊿AGPに三平方の定理を適用すると、

$$AG^2 + AP^2 = GP^2$$

$$\Rightarrow {d_2}^2 + 1^2 = (1 + R_o)^2 \cdots ③$$

です。

また、⊿DEGにも三平方の定理を適用すると、

$$DE^2 + EG^2 = DG^2 \Rightarrow {R_k}^2 + (d_1 - d_2)^2 = (R_k + R_o)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - d_2\right)^2 = \left(\frac{1}{6} + R_o\right)^2 \cdots ④$$

です。③④をR_oについて解くと、

$$R_o = 14 \pm 8\sqrt{3}$$

ですが、$R_o < 1$なので、$R_o = 14 - 8\sqrt{3}$が適切です。

以上より甲乙の半径は、それぞれ$\frac{1}{6}$, $14 - 8\sqrt{3}$です。

補足1　積分$\int \frac{dx}{1+x^2}$の計算

$x = \tan\theta$とすると、$dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$なので、

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int \cos^2\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int d\theta = \theta + C = \tan^{-1} x + C(\text{定数})$$

です。