第 444 回　よふかしのつらいおじさん

(1)

$t=5-x$ とおきます。

すると、

$dx=-dt$、$x:2\to3$ のとき $t:3\to2$ なので、

$$I=\int_2^3\frac{x^2}{x^2+(5-x)^2}dx=\int_3^2\frac{(5-t)^2}{(5-t)^2+t^2}(-dt)=\int_2^3\frac{(5-t)^2}{(5-t)^2+t^2}dt=\int_2^3\frac{(5-x)^2}{(5-x)^2+x^2}dx$$

(変数を変えても定積分の値は変わりません)

よって、

$$2I=\int_2^3\frac{x^2}{x^2+(5-x)^2}dx+\int_2^3\frac{(5-x)^2}{(5-x)^2+x^2}dx=\int_2^3\frac{x^2+(5-x)^2}{x^2+(5-x)^2}dx=\int_2^3 1dx=[x]_2^3=1$$

ゆえに、

$$I=\int_2^3\frac{x^2}{x^2+(5-x)^2}dx=\frac{1}{2}$$

(2)

$\frac{x^2}{e^x+1}$ と y 軸対称の$\frac{(-x)^2}{e^{(-x)}+1}=\frac{x^2}{e^{-x}+1}$ を考えます。

積分区間が y 軸対称なので、$\int_{-1}^1\frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_{-1}^1\frac{x^2}{e^{-x}+1}dx$ です。

よって、

$$2I=\int_{-1}^1\frac{x^2}{e^x+1}dx+\int_{-1}^1\frac{x^2}{e^{-x}+1}dx=\int_{-1}^1\left(\frac{x^2}{e^x+1}+\frac{x^2}{e^{-x}+1}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^1 x^2\times\frac{e^{-x}+1+e^x+1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}dx=\int_{-1}^1 x^2\times\frac{e^{-x}+1+e^x+1}{1+e^x+e^{-x}+1}dx$$

$$=\int_{-1}^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{2}{3}$$

ゆえに、

$$I=\int_{-1}^1\frac{x^2}{e^x+1}dx=\frac{1}{3}$$

(3)

$$I=\int_0^\pi\frac{x\ \sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

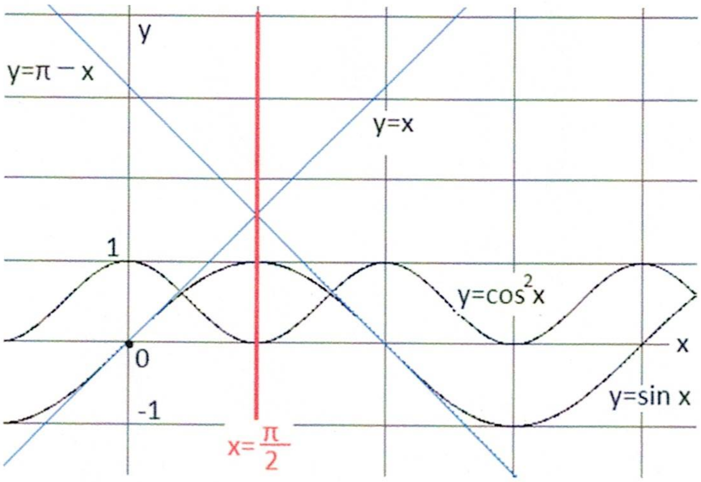
積分区間の中央は、$x=\frac{\pi}{2}$ です。

三角関数の部分は、$x=\frac{\pi}{2}$ 対称です。

($\cos^2 x=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$ なので周期が $\pi$)

x の部分は、$\pi$ − x が、$x=\frac{\pi}{2}$ 対称です。

それで、$y=\frac{x\ \sin x}{1+\cos^2 x}$ と $y=\frac{(\pi-x)\ \sin x}{1+\cos^2 x}$ とは、$x=\frac{\pi}{2}$ 対称になります。




よって、

$$2I=\int_0^\pi \frac{x\ \sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^\pi \frac{(\pi-x)\ \sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$\cos x=t$ とおきます。

すると、

$-\sin x\,dx=dt$、$x:0\to\pi$ のとき $t:1\to-1$ なので、

$$2I=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\int_1^{-1}\frac{1}{1+t^2}dt=\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\pi[\tan^{-1}t]_{-1}^{1}=\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

ゆえに、

$$I=\frac{\pi^2}{4}$$

(4)

$$I=\int_0^\pi x\cos^2 x\ \sin x\,dx$$

(3)と同様に、

$y=x\cos^2 x\ \sin x$ と $y=(\pi-x)\cos^2 x\ \sin x$ とは、$x=\frac{\pi}{2}$ 対称になります。

$\cos x=t$ とおきます。

すると、

$-\sin x\,dx=dt$、$x:0\to\pi$ のとき $t:1\to-1$ なので、

$$2I=\int_0^\pi x\cos^2 x\ \sin x\,dx+\int_0^\pi(\pi-x)\cos^2 x\ \sin x\,dx=\pi\int_0^\pi \cos^2 x\ \sin x\,dx$$

$$=-\pi\int_1^{-1}t^2\,dt=\pi\int_{-1}^{1}t^2\,dt=\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}\pi$$

ゆえに、

$$I=\frac{\pi}{3}$$

(5)

この問題は、共立出版の微積分演習Ⅰに同様の問題がありました。
自分では、とても思いつきません。

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(\underline{\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x}\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\underline{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\frac{\pi}{4}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\underline{\cos x}\,dx\quad\cdots\quad(1)$$

ここで、$\frac{\pi}{4}-x=t$ とおくと、$dx=-dt$
$x:0\to\frac{\pi}{4}$ のとき $t:\frac{\pi}{4}\to0$なので、

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\underline{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\,dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\log\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\underline{\cos x}\,dx$$

つまり(1)の最初と最初と最後の定積分の値が同じです。

よって、

$$I=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos\frac{\pi}{4}\,dx=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dx=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}[x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\left(\log1-\frac{1}{2}\log2\right)\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\log2}{8}$$

追加問題
問題 1
図のように記号を付します。
円甲の半径を k、乙の半径を t とします。

円甲の半径を求めます。
EH の長さを x とします。

直角三角形 BKF に三平方の定理を用います。

$$BK^2=KF^2+FB^2\quad\to\quad(1-k)^2=x^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\quad\to\quad1-2k+k^2=x^2+k^2+k+\frac{1}{4}$$

$$\to\quad\frac{3}{4}-3k=x^2\quad\to\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-4k}\,(>0)$$

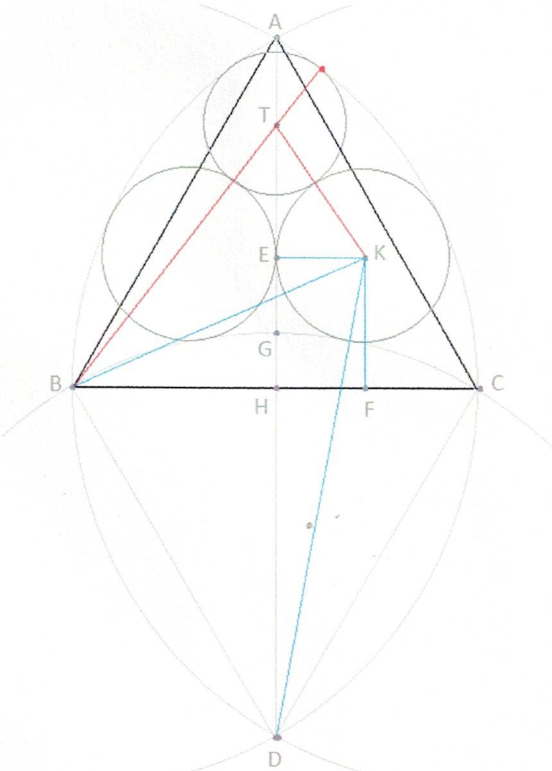
直角三角形 KDE に三平方の定理を用います。

$$KD^2 = DE^2 + EK^2 \quad \rightarrow \quad (1+k)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-4k}\right)^2 + k^2$$

$$\rightarrow \quad 1 + 2k + k^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{1-4k} + \frac{3}{4}(1-4k) + k^2 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2} + 5k = \frac{3}{2}\sqrt{1-4k}$$

$$\rightarrow \quad -1 + 10k = 3\sqrt{1-4k} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{25}\left(-2 \pm \sqrt{54}\right)$$

$$\rightarrow \quad k = \frac{1}{25}\left(-2 + 3\sqrt{6}\right)\ (> 0)$$




次に、円乙の半径を求めます。

TE の長さを y とします。

直角三角形 TKE に三平方の定理を用います。

$$TK^2 = KE^2 + ET^2 \quad \rightarrow \quad (t+k)^2 = k^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad t^2 + 2kt + k^2 = k^2 + y^2$$

$$\rightarrow \quad y = \sqrt{t^2 + 2kt}\ (> 0)$$

直角三角形 BTH に三平方の定理を用います。

$$BT^2 = TH^2 + HB^2 \quad \rightarrow \quad (1-t)^2 = (y+x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad (1-t)^2 = \left(\sqrt{t^2+2kt} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-4k}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad 1 - 2t + t^2 = t^2 + 2kt + \sqrt{3}\sqrt{1-4k}\sqrt{t^2+2kt} + \frac{3}{4}(1-4k) + \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \quad -2(1+k)t + 3k = \sqrt{3}\sqrt{1-4k}\sqrt{t^2+2kt}$$

$$\rightarrow \quad (4 + 8k + 4k^2)t^2 - (12 + 12k)t + 9k^2 = (3 - 12k)t^2 + (6k - 24k^2)t$$

$$\rightarrow \quad (1 + 20k + 4k^2)t^2 - (12 + 18k - 24k^2)t + 9k^2 = 0$$

ここで、$k=\frac{1}{25}(-2+3\sqrt{6})$ を代入します。

(計算省略)

$(1452\sqrt{6}-143)t^2-2(747\sqrt{6}-798)t+(522-108\sqrt{6})=0 \quad \rightarrow$

$$t=\frac{(747\sqrt{6}-798)\pm\sqrt{(747\sqrt{6}-798)^2-(1452\sqrt{6}-143)(522-108\sqrt{6})}}{1452\sqrt{6}-143}$$

$$=\frac{(747\sqrt{6}-798)\pm\sqrt{5000400-1965600\sqrt{6}}}{1452\sqrt{6}-143}=\frac{(747\sqrt{6}-798)\pm\sqrt{3600(1389-546\sqrt{6})}}{1452\sqrt{6}-143}$$

$$=\frac{(747\sqrt{6}-798)\pm 60\sqrt{1389-546\sqrt{6}}}{1452\sqrt{6}-143}=\frac{(747\sqrt{6}-798)\pm 60\sqrt{(882+507)-2\sqrt{882\times 507}}}{1452\sqrt{6}-143}$$

$$=\frac{(747\sqrt{6}-798)\pm 60(\sqrt{882}-\sqrt{507})}{1452\sqrt{6}-143}=\frac{(747\sqrt{6}-798)\pm 60(21\sqrt{2}-13\sqrt{3})}{1452\sqrt{6}-143}$$

$$=\frac{(747\sqrt{6}-798)\pm(1260\sqrt{2}-780\sqrt{3})}{1452\sqrt{6}-143}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{747\sqrt{6}-798+1260\sqrt{2}-780\sqrt{3}}{1452\sqrt{6}-143}\times\dfrac{1452\sqrt{6}+143}{1452\sqrt{6}+143}\\[2ex] \dfrac{747\sqrt{6}-798-1260\sqrt{2}+780\sqrt{3}}{1452\sqrt{6}-143}\times\dfrac{1452\sqrt{6}+143}{1452\sqrt{6}+143}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{6393750-1051875\sqrt{6}+3547500\sqrt{3}-3217500\sqrt{2}}{12629375}(=0.4284\cdots)\\[2ex] \dfrac{6393750-1051875\sqrt{6}-3547500\sqrt{3}+3217500\sqrt{2}}{12629375}(=0.1760\cdots)\end{cases}$$

よって、乙の半径は、分母・分子を 6875 で約分して

$$\frac{930-153\sqrt{6}-516\sqrt{3}+468\sqrt{2}}{1837}$$

問題 2

図のように記号を付します。

円甲の半径を k、乙の半径を t とします。

円甲の半径を求めます。

AF の長さを x とします。

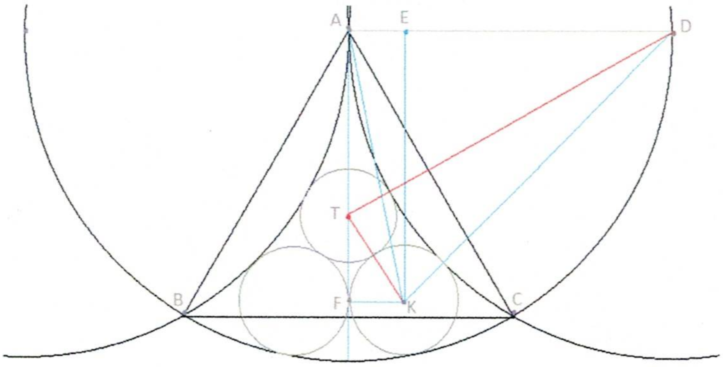
直角三角形 KDE に三平方の定理を用います。

$KD^2=DE^2+EK^2 \quad \rightarrow \quad (1+k)^2=(1-k)^2+x^2$

$\rightarrow \quad x^2=4k \quad \rightarrow \quad x=2\sqrt{k}$

直角三角形 AKF に三平方の定理を用います。

$AK^2=KF^2+FA^2 \quad \rightarrow \quad (1-k)^2=k^2+4k \quad \rightarrow \quad 6k=1 \quad \rightarrow \quad k=\frac{1}{6}$




次に、円乙の半径を求めます。

TF の長さを y とします。

直角三角形 TKF に三平方の定理を用います。

$TK^2 = KF^2 + FT^2 \quad \rightarrow \quad (t+k)^2 = k^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = t^2 + 2kt \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{t^2 + 2kt}\,(>0)$

直角三角形 TDA に三平方の定理を用います。

$TD^2 = DA^2 + AT^2 \quad \rightarrow \quad (1+t)^2 = 1^2 + (AF - TF)^2 \quad \rightarrow \quad 1 + 2t + t^2 = 1 + (x-y)^2$

$\rightarrow \quad 2t + t^2 = \left(2\sqrt{k} - \sqrt{t^2 + 2kt}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 2t + t^2 = 4k - 4\sqrt{k}\sqrt{t^2 + 2kt} + (t^2 + 2kt)$

$\rightarrow \quad 4\sqrt{k}\sqrt{t^2 + 2kt} = 2(k-1)t + 4k \quad \rightarrow \quad 16k(t^2 + 2kt) = 4(k-1)^2 t^2 + 16(k-1)kt + 16k^2$

$\rightarrow \quad \{16k - 4(k-1)^2\}t^2 + \{32k^2 - 16(k-1)k\}t - 16k^2 = 0$

$\rightarrow \quad (-4k^2 + 24k - 4)t^2 + (16k^2 + 16k)t - 16k^2 = 0$

$\rightarrow \quad (-k^2 + 6k - 1)t^2 + 2(2k^2 + 2k)t - 4k^2 = 0$

$$t = \frac{-(2k^2 + 2k) \pm \sqrt{(2k^2 + 2k)^2 + 4k^2(-k^2 + 6k - 1)}}{-k^2 + 6k - 1}$$

$$= \frac{-(2k^2 + 2k) \pm 2k\sqrt{(k+1)^2 + (-k^2 + 6k - 1)}}{-k^2 + 6k - 1} = \frac{-2k(k+1) \pm 4k\sqrt{2k}}{-k^2 + 6k - 1}$$

ここで、$k = \frac{1}{6}$ を代入すると、

$$t = \frac{-2k(k+1) \pm 4k\sqrt{2k}}{-k^2 + 6k - 1} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + 1\right) \pm 4 \cdot \frac{1}{6}\sqrt{2 \cdot \frac{1}{6}}}{-\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{6} - 1} = \frac{-\frac{7}{18} \pm \frac{4}{6}\sqrt{\frac{1 \times 3}{3 \times 3}}}{-\frac{1}{36}}$$

$$= \frac{-7 \pm 4\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = -2\left(-7 \pm 4\sqrt{3}\right) = \begin{cases} 14 - 8\sqrt{3}(= 0.1435\cdots) \\ 14 + 8\sqrt{3}(= 27.8564\cdots) \end{cases}$$

よって、円乙の半径は、$14 - 8\sqrt{3}$