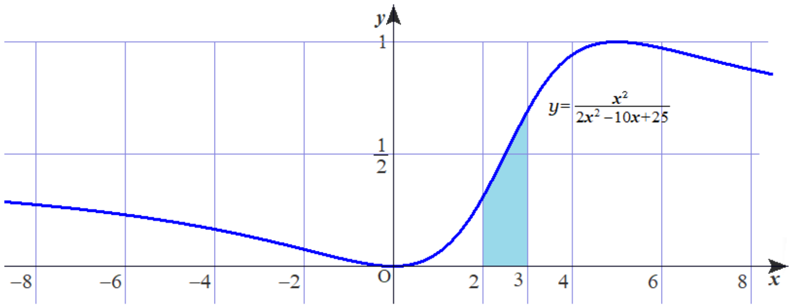
● 問題 444 解答＜三角定規＞

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^2+(5-x)^2}dx=\int_2^3 \frac{x^2}{2x^2-10x+25}dx=\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x^2-10x+25+10x-25}{2x^2-10x+25}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_2^3\left(1+\frac{5}{2}\cdot\frac{4x-10}{2x^2-10x+25}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left[x+\frac{5}{2}\log(2x^2-10x+25)\right]_2^3=\mathbf{\frac{1}{2}}$

…[答]



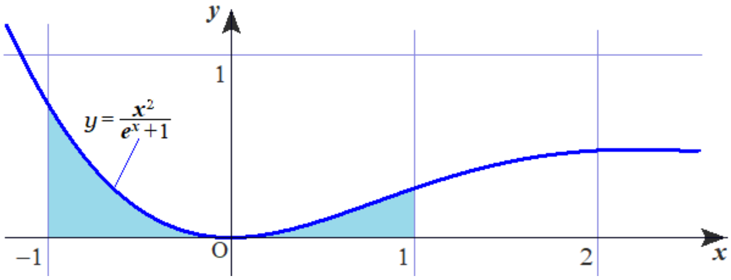
(2) $\displaystyle I=\int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_{-1}^0 \frac{x^2}{e^x+1}dx+\int_0^1 \frac{x^2}{e^x+1}dx$ …①

①の右辺第 1 項で　$x=-u$ と置くと，$dx=-du$, $x\in[-1,\ 0]\Leftrightarrow u\in[0,\ 1]$ だから

第 1 項＝$\displaystyle\int_0^1\frac{u^2}{e^{-u}+1}du=\int_0^1\frac{u^2e^u}{1+e^u}du$

$\displaystyle\therefore\ I=\int_0^1\frac{x^2(e^x+1)}{e^x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^1 x^2dx=\mathbf{\frac{1}{3}}$ …[答]

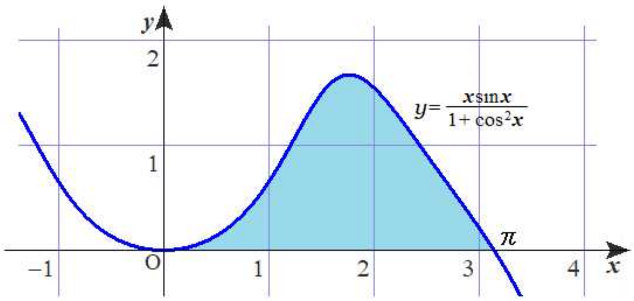


(3) $\displaystyle I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx$

$x=\pi-u$ と置くと，$dx=-du$, $x\in[0,\ \pi]\Leftrightarrow u\in[\pi,\ 0]$ だから，

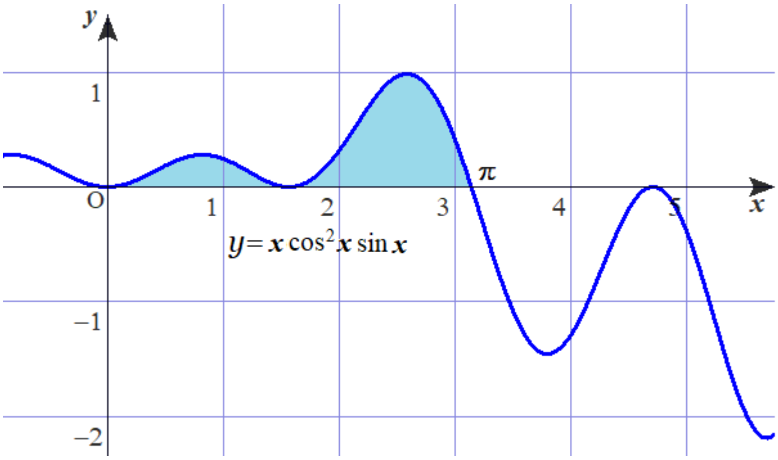
$\displaystyle I=\int_\pi^0\frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\cdot(-du)=\int_0^\pi\frac{(\pi-u)\sin u}{1+\cos^2u}du=\int_0^\pi\frac{\pi\sin u}{1+\cos^2u}du-I$

$\displaystyle\therefore\ 2I=\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx=\pi\left[\tan^{-1}(-\cos x)\right]_0^\pi=\pi\cdot\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\ I=\mathbf{\frac{\pi^2}{4}}$ …[答]



(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2 x\sin x\,dx=\int_0^{\pi} x\left(-\frac{1}{3}\cos^3 x\right)'dx=-\frac{1}{3}\left[x\cos^3 x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos^3 x\,dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{12}\int_0^{\pi}(\cos 3x+3\cos x)dx=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{12}\left[\frac{1}{3}\sin 3x+3\sin x\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ …[答]



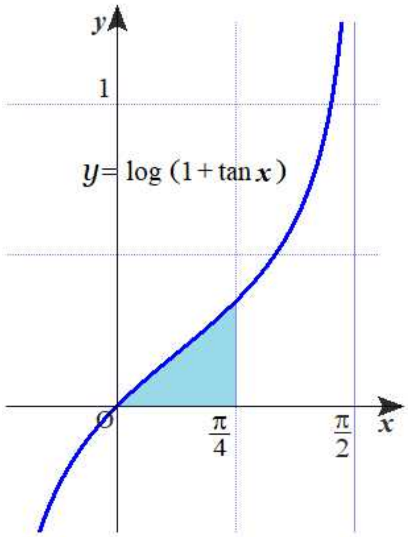
(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan x)dx=\int_0^{\pi/4}\log\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)dx=\int_0^{\pi/4}(\log(\cos x+\sin x)-\log(\cos x))dx$ …②

$\displaystyle\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ だから，②の第 1 項$\displaystyle=\int_0^{\pi/4}\left\{\frac{1}{2}\log 2+\log\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}dx$ …③

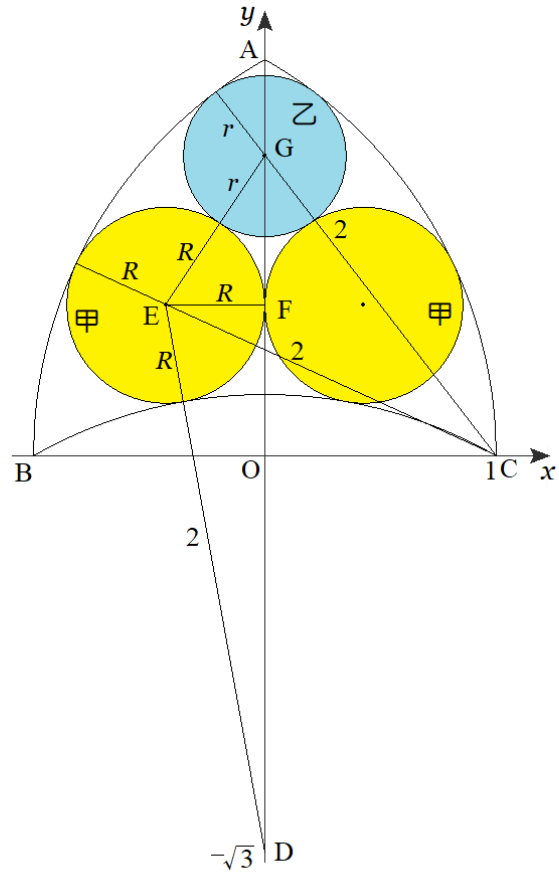
$\displaystyle x-\frac{\pi}{4}=-u$ と置くと，$dx=-du$, $\displaystyle x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]\Leftrightarrow u\in\left[\frac{\pi}{4},\ 0\right]$ だから

③の第 2 項の積分$\displaystyle=\int_{\pi/4}^{0}\log(\cos(-u))\cdot(-du)=\int_0^{\pi/4}\log(\cos(x))dx$ …④

②③④より，②$\displaystyle=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\log 2\,dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}\log 2}$ …[答]



《追加問題》



[問題 1] 右図のように座標軸及び各点を定める。便宜上円弧の半径を 2 とし，甲･乙円の半径を R, r とする。

E 点の座標を $(-R,\ a)$ とすると

CE$=2-R$ より， $(1+R)^2+a^2=(2-R)^2$

整理して， $6R=3-a^2$ …①

DE$=2+R$ より， $R^2+(a+\sqrt{3})^2=(2+R)^2$

整理して， $4+4R=(a+\sqrt{3})^2$ …②

①②を連立させて解いて,

$$R=\frac{6\sqrt{6}-4}{25},\quad a=\frac{3(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5}\quad \cdots ③$$

次に，G 点の座標を $(0,\ b)$ とすると

CG$=2-r$ より， $1+b^2=(2-r)^2$ …④

EG$=R+r$ だから，$R^2+(b-a)^2=(R+r)^2$

整理して $2Rr+r^2=(b-a)^2$ …⑤

④⑤に③を代入し，連立させて解くと

$$r=\frac{6(310+156\sqrt{2}-172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}\quad \cdots ⑥$$

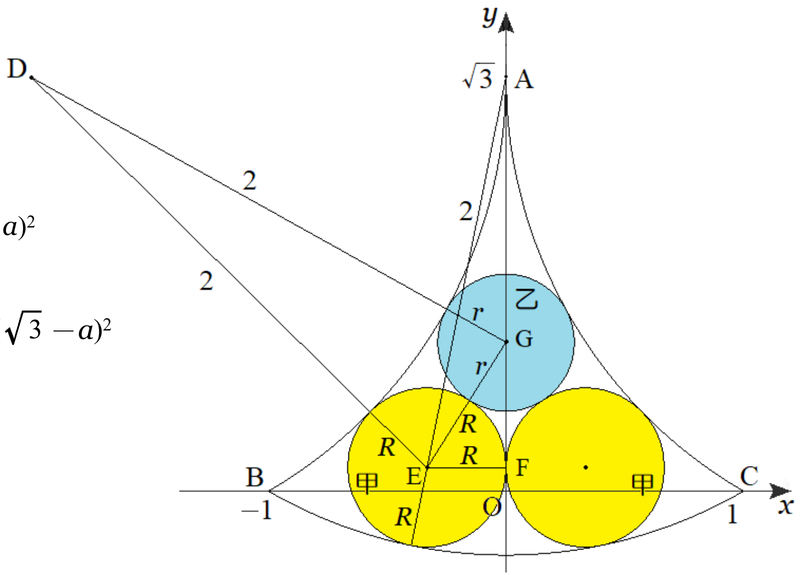
③⑥は円弧の半径を 2 として求めたものだから，

本来の問題の答は　甲円$=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{6}-2}{25}}$ $(=0.213\cdots)$,

乙円$=\boldsymbol{\dfrac{3(310+156\sqrt{2}-172\sqrt{3}-51\sqrt{6})}{1837}}$ $(=0.176\cdots)$

…[答]

［問題２］ 右図のように座標軸及び各点を定める。便宜上円弧の半径を 2 とし, 甲・乙円の半径を R, r とする。



E 点の座標を $(-R,\ a)$ とすると

AE＝$2-R$ より， $(2-R)^2=R^2+(\sqrt{3}-a)^2$

整理して， $4-4R=(\sqrt{3}-a)^2$ …①

DE＝$2+R$ より， $(2+R)^2=(2-R)^2+(\sqrt{3}-a)^2$

整理して， $8R=(\sqrt{3}-a)^2$ …②

①②を連立させて解いて,

$$R=\frac{1}{3},\quad a=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3} \quad \cdots ③$$

次に, G 点の座標を $(0,\ b)$ とすると

DG＝$2+r$ より， $(2+r)^2=2^2+(\sqrt{3}-b)^2$

整理して， $r^2+4r=(\sqrt{3}-b)^2$ …④

EG＝$R+r$ だから，$(R+r)^2=R^2+(b-a)^2$

整理して $2Rr+r^2=(b-a)^2$ …⑤

④⑤に③を代入し，連立させて解くと

$$r=28-16\sqrt{3} \quad \cdots ⑥$$

③⑥は円弧の半径を 2 として求めたものだから,

本来の問題の答は, 甲円＝$\mathbf{\frac{1}{6}}$ (＝0.166…), 乙円＝$\mathbf{14-8\sqrt{3}}$ (＝0.143…) …[答]