第 445 回

問題　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\sin x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}x$　(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$（$n$ は正の整数）　(5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$

解答

(1)　$\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$

x	$0\nearrow\frac{\pi}{3}$
t	$0\nearrow\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x=\sqrt{1-t^2}$ より，$dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

与式$\displaystyle=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1+t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\Big[-2(1-t)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3-\sqrt{3}$　答

(2)　$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと，$dx=-dt$

x	$0\nearrow\pi$
t	$\frac{\pi}{2}\searrow-\frac{\pi}{2}$

与式$\displaystyle=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos t}{3+\cos^2 t}(-dt)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}\cos t}{3+\cos^2 t}dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\cos t}{3+\cos^2 t}dt=\frac{\pi}{2}\cdot2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{3+\cos^2 t}dt$

$\displaystyle=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{4-\sin^2 t}dt=\bigstar$

$\sin t=u$ とおくと，$\cos t\,dt=du$

t	$0\nearrow\frac{\pi}{2}$
u	$0\nearrow1$

$\displaystyle\bigstar=\pi\int_0^1\frac{1}{4-u^2}du=\frac{\pi}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)du=\frac{\pi}{4}\big[\log(2+u)-\log(2-u)\big]_0^1=\frac{\pi}{4}\log 3$　答

(3)　$e^x=t$ とおくと，$e^x dx=dt$　$\therefore\ dx=\dfrac{dt}{t}$

x	$0\nearrow1$
t	$1\nearrow e$

与式$\displaystyle=\int_1^e\frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{t}=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt=\big[\log t-\log(1+t)\big]_1^e=1-\log(1+e)-(-\log 2)$

$=1+\log 2-\log(1+e)$　答

(4)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx=I_n$ とおく。

$\displaystyle I_1=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x}dx=\pi$　…①

$$I_2=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}2\cos x\,dx=[2\sin x]_0^{\pi}=0 \quad \cdots②$$

$n \geqq 3$ のとき，

$$\sin nx=\sin(n-2)x\cos 2x+\cos(n-2)x\sin 2x=\sin(n-2)x\cdot(1-2\sin^2 x)+\cos(n-2)x\cdot 2\sin x\cos x$$

$$=\sin(n-2)x+2\sin x\{\cos(n-2)x\cos x-\sin(n-2)x\sin x\}=\sin(n-2)x+2\sin x\cos(n-1)x$$ より，

$$I_n=I_{n-2}+2\int_0^{\pi}\cos(n-1)x\,dx=I_{n-2}+2\left[\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\right]_0^{\pi}=I_{n-2} \quad \cdots③$$

①，②，③より，k を正の整数として，

$I_1=I_3=I_5=\cdots=I_{2k-1}=\pi$

$I_2=I_4=I_6=\cdots=I_{2k}=0$

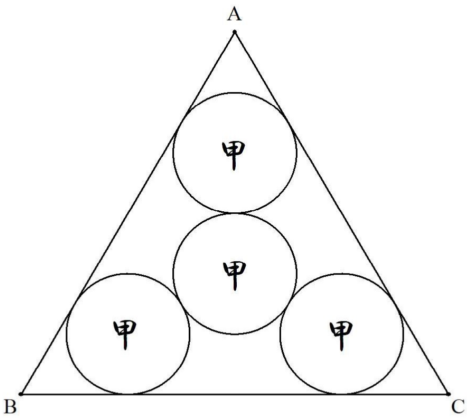
よって，$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\begin{cases}\pi\ (n\text{が奇数のとき})\\ 0\ (n\text{が偶数のとき})\end{cases}$ 答

(5) $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ であるから，部分積分法により，

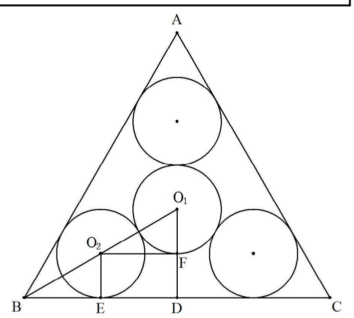
与式$=[x(-\cot x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}1\cdot(-\cot x)dx=\frac{\pi}{4}+[\log|\sin x|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\log 1-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi+\log 4}{4}$ 答

追加問題 1

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC 内に
図のように 4 個の甲円を配置する。
甲円の半径を求めよ。



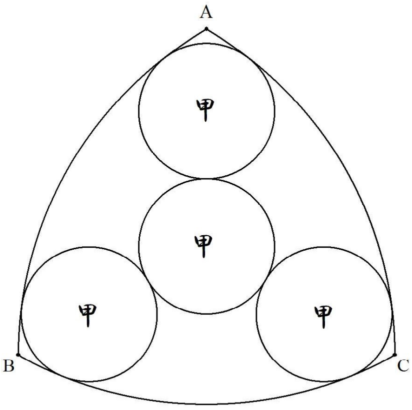
解答　中央の円を$O_1(r)$，左下の円を$O_2(r)$とおき，図のように記号を付ける。



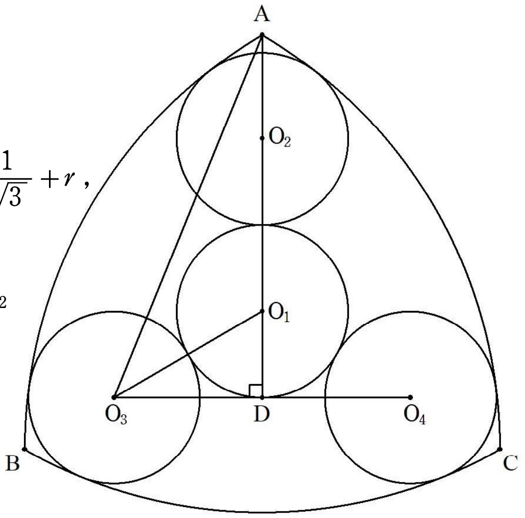
$\mathrm{BD}=\mathrm{BE}+\mathrm{ED}=\sqrt{3}r+\sqrt{3}r=2\sqrt{3}r=\dfrac{1}{2}$ より，$r=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ 答

追加問題 2

A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC，弧 CA，弧 AB は半径１の円弧である。
弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に
甲円４個を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。



解答　４個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，
図のように記号を付ける。



$\triangle AO_3D$ について，$O_3D=\sqrt{3}r$，
O_1 は$\triangle ABC$の外心であるから，正弦定理により，

$2AO_1=\dfrac{1}{\sin 60^\circ}$　　$\therefore AO_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，$AD=AO_1+O_1D=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+r$，

また，$AO_3=1-r$ より，

$\triangle AO_3D$ に三平方の定理を適用して，$(\sqrt{3}r)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+r\right)^2=(1-r)^2$

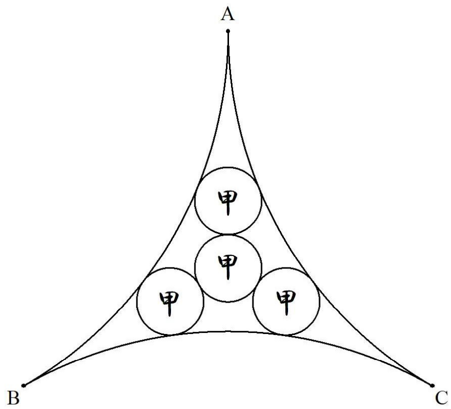
展開して整理すると，$9r^2+2(3+\sqrt{3})r-2=0$

$$\therefore r=\frac{-(3+\sqrt{3})\pm\sqrt{30+6\sqrt{3}}}{9}$$

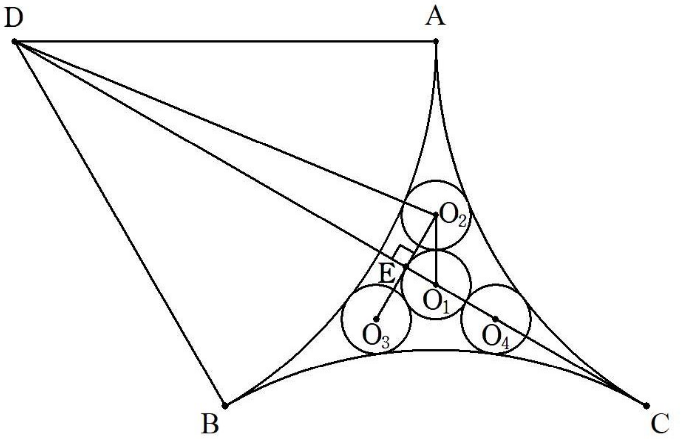
$r>0$ より，　$r=\dfrac{-3-\sqrt{3}+\sqrt{6(5+\sqrt{3})}}{9}$　（$\fallingdotseq 0.180383$）　答

追加問題 3

A，B，C は１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC，弧 CA，弧 AB は半径１の円弧である。
弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形の中に
甲円４個を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。



$\boxed{解答}$ 4個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，図のように記号を付ける。
（△DBA は正三角形）



△DEO_2 について，$EO_2=\sqrt{3}\,r$，

O_1 は△ABCの外心であるから，正弦定理により，

$2\,CO_1=\dfrac{1}{\sin 60^\circ}$　$\therefore CO_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，

$DE=DC-O_1C-EO_1=\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-r$，

また，$O_2D=1+r$ より，

△DEO_2 に三平方の定理を適用して，$(\sqrt{3}\,r)^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-r\right)^2=(1+r)^2$

展開して整理すると，$9r^2-2(3+2\sqrt{3})r+1=0$　$\therefore r=\dfrac{3+2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+12\sqrt{3}}}{9}=\dfrac{3+2\sqrt{3}\pm 2\sqrt{3(1+\sqrt{3})}}{9}$

$r<\dfrac{1}{3}$ より，　$r=\dfrac{3+2\sqrt{3}-2\sqrt{3(1+\sqrt{3})}}{9}$　（≒ 0.0820352）　$\boxed{答}$

（2024/8/18　ジョーカー）