

問題1

(1) 根拠はないのですが、 $\sqrt{1 + \sin x} = t$ と置換すると、

$$1 + \sin x = t^2 \Rightarrow \cos x \, dx = 2t \, dt \Rightarrow dx = \frac{2t}{\cos x} \, dt = \frac{2}{\sqrt{2-t^2}} \, dt$$

なので、

$$\text{与式} = \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot \frac{2}{\sqrt{2-t^2}} \, dt = - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(2-t^2)'}{\sqrt{2-t^2}} \, dt = \left[-2\sqrt{2-t^2} \right]_1^{\sqrt{2}} = 2$$

です。

(2) 前回の定積分の問題と同様に、積分区間の上下限を入れ替えて、定積分の関係式を導きます。

与式 = Iとして、 $t = \pi - x$ とすると、 $dx = -dt$ なので、

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi-t) \sin t}{3 + \sin^2 t} \, dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} \, dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} \, dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} \, dx - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} \, dx \end{aligned}$$

となります。すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} \, dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x} \, dx = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2 - \cos x} + \frac{1}{2 + \cos x} \right) (\cos x)' \, dx \\ &= -\frac{1}{4} [-\log(2 - \cos x) + \log(2 + \cos x)]_0^{\pi} = \frac{\log 3}{2} \end{aligned}$$

ですから、

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\log 3}{2} = \frac{\pi \log 3}{4}$$

です。

(3) こちらも $t = -x$ とやって、積分区間の上下限を入れ替えると、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= - \int_0^{-1} \frac{1}{1 + e^{-t}} \, dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{1 + e^{-t}} \, dt = \int_{-1}^0 \frac{e^t}{1 + e^t} \, dt = \int_{-1}^0 \frac{(1 + e^t)'}{1 + e^t} \, dt \\ &= [\log(1 + e^t)]_{-1}^0 = \log 2 - \log(1 + e) + 1 \end{aligned}$$

です。

(4) まず、被積分関数の一般項を求めます。

$$a_n = \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

として、いくつか計算すると、補足1のようになりました。この試行から、 a_n と a_{n-2} の差に何らかの規則性がある、 a_n は n の偶奇によって決まるかも？と見当がつかます。

n は自然数で、 $a_1 = 1$ ですが、0から始まっていると都合が良いので、 $a_0 = 0$ を拡張しておきます。

すると、 $n \geq 2$ のとき、 a_n と a_{n-2} の差は、

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-2} &= \frac{1}{\sin x} \{ \sin(nx) - \sin((n-2)x) \} \\ &= \frac{1}{\sin x} \cdot 2 \cos((n-1)x) \sin x = 2 \cos((n-1)x) \end{aligned}$$

です。

上記の考察から、 n の偶奇で場合分けして、二項ずつペアーにして考えると、

n が偶数のとき

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-2} &= 2 \cos((n-1)x) \\ a_{n-2} - a_{n-4} &= 2 \cos((n-3)x) \\ \dots \end{aligned}$$

$$a_2 - a_0 = 2 \cos x$$

これらをすべて足し合わせると、

$$\begin{aligned} a_n - a_0 &= 2 \{ \cos((n-1)x) + \dots + \cos x \} \\ \Rightarrow a_n &= 2 \{ \cos((n-1)x) + \dots + \cos x \} \end{aligned}$$

です。

n が奇数のとき

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-2} &= 2 \cos((n-1)x) \\ a_{n-2} - a_{n-4} &= 2 \cos((n-3)x) \\ \dots \end{aligned}$$

$$a_3 - a_1 = 2 \cos(2x)$$

これらをすべて足し合わせると、

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= 2 \{ \cos((n-1)x) + \dots + \cos(2x) \} \\ \Rightarrow a_n &= 2 \{ \cos((n-1)x) + \dots + \cos(2x) \} + 1 \end{aligned}$$

です。

ここで、 $k \geq 1$ に対して、

$$\int_0^\pi \cos(kx) dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi = 0$$

なので、 $\cos((n-1)x), \dots, \cos x$ の定積分値はすべて0です。

以上より、求める値は、次のようになります。

n が偶数のとき

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = \int_0^\pi a_n dx = 0$$

n が奇数のとき

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx = \int_0^\pi a_n dx = \pi$$

(5) よいアイデアが浮かばなかったなので、実直に原始関数 $F(x)$ を求めました。補足2を利用して、部分積分します。

$$F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int x \left(-\frac{1}{\tan x} \right)' dx = -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x} dx$$

ここで、

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \log(\sin x) + C(\text{定数})$$

なので、

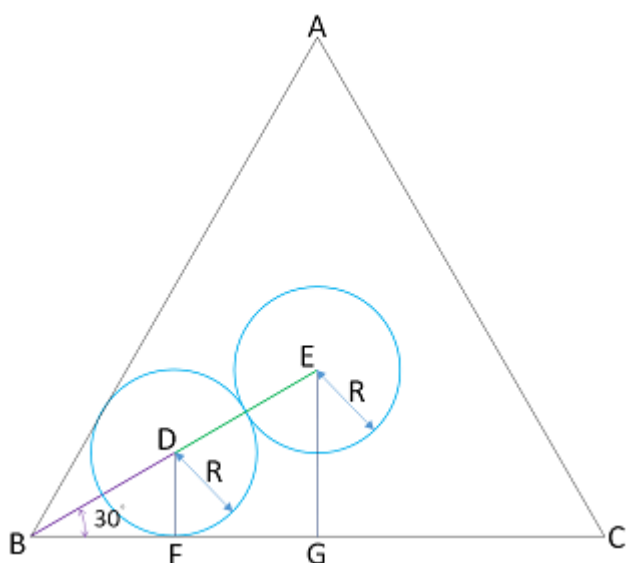
$$F(x) = -\frac{x}{\tan x} + \log(\sin x) + C(\text{定数})$$

です。したがって、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}} [F(x)]_{\frac{\pi}{4}}^a \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{x}{\tan x} + \log(\sin x) \right\} - \left\{ -\frac{\frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4}} + \log \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \frac{\pi + 2 \log 2}{4} \end{aligned}$$

です。

追加問題1



左図のように、甲の中心D, EからBCに垂直に下した点をそれぞれF, Gとします。そして、甲の半径をRとすると、

$$BF + FG = BG \Rightarrow \frac{R}{\tan 30^\circ} + 2R \cos 30^\circ = \frac{1}{2}$$

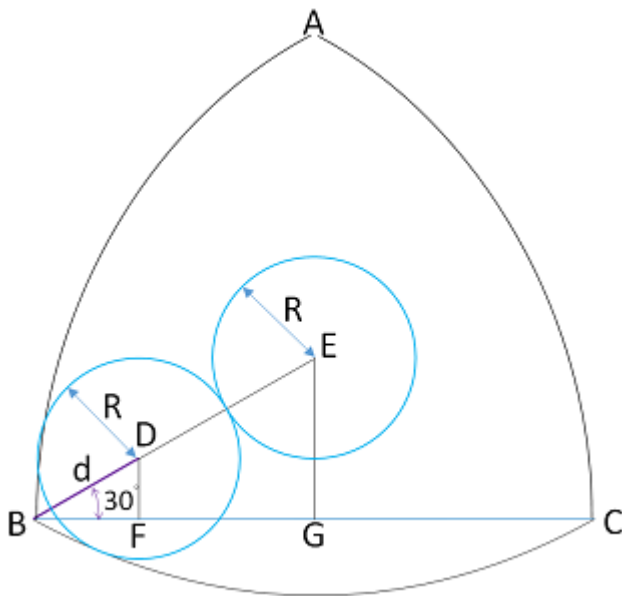
これを解いて、

$$R = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

となります。

よって、甲の半径は $\frac{\sqrt{3}}{12}$ です。

追加問題2

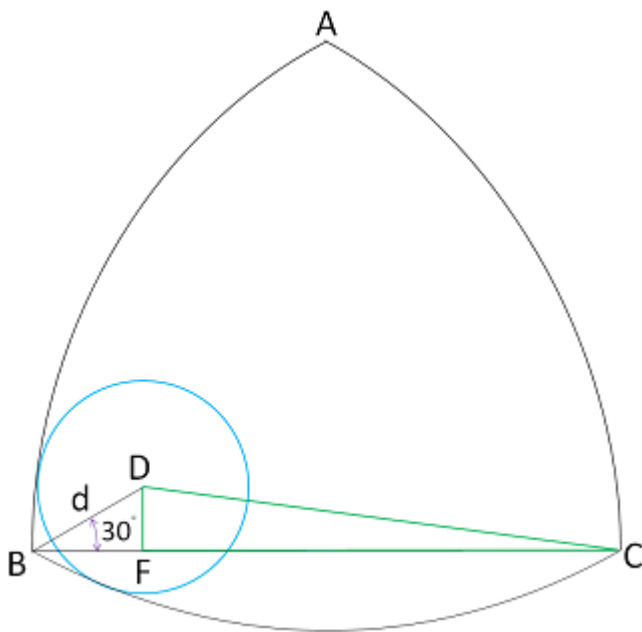


左図のように、甲の中心D, EからBCに垂直に下した点をそれぞれF, Gとします。そして、甲の半径をR、 $BD = d$ とすると、

$$BF + FG = BG$$

$$\Rightarrow d \cos 30^\circ + 2R \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

です。



また、 $\triangle CDF$ に三平方の定理を適用すると、

$$DF^2 + CF^2 = CD^2 \Rightarrow$$

$$(d \sin 30^\circ)^2 + (1 - d \cos 30^\circ)^2 = (1 - R)^2 \dots \textcircled{2}$$

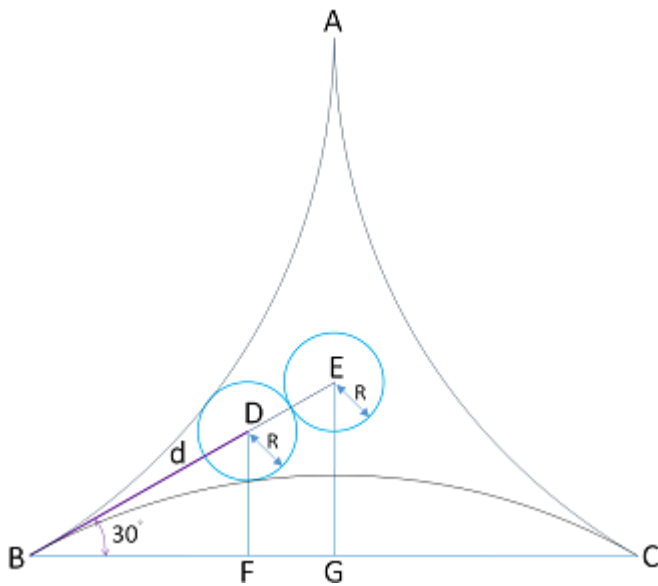
です。①②を解くと、

$$(d, R) = \left(\frac{\pm 2\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3}+5} + 5\sqrt{3} + 6}{9}, \frac{\pm \sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3}+5} - \sqrt{3} - 3}{9} \right)$$

となりますが、 $R > 0$ なので、甲の半径は

$$\frac{\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3}+5} - \sqrt{3} - 3}{9} \text{です。}$$

追加問題3

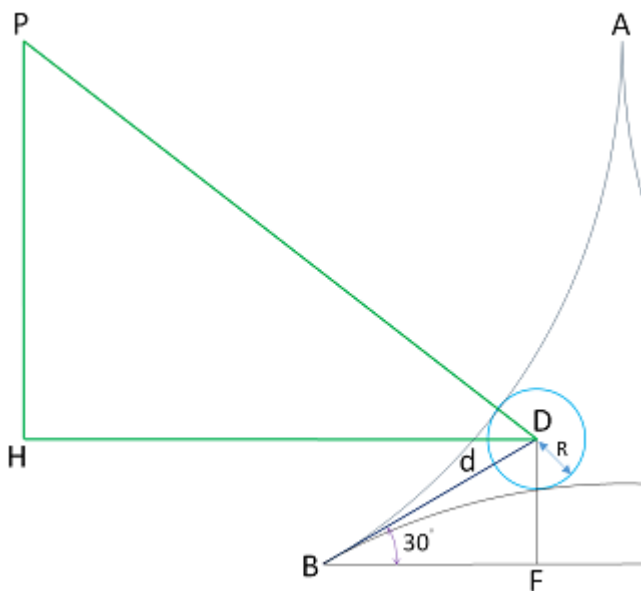


左図のように、甲の中心D, EからBCに垂直に下した点をそれぞれF, Gとします。そして、甲の半径をR、 $BD = d$ とすると、

$$BF + FG = BG$$

$$\Rightarrow d \cos 30^\circ + 2R \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

です。



また、弧BCの中心Pから垂直に引いた直線とDから水平に引いた直線の交点をPとします。そして、 $\triangle DHP$ に三平方の定理を適用すると、

$$HP^2 + DH^2 = DP^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - d \sin 30^\circ\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + d \cos 30^\circ\right)^2$$

$$= (1 + R)^2 \dots \textcircled{2}$$

です。①②を解くと、

$$(d, R) = \left(\frac{\mp 4\sqrt{3+3\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 6}{9}, \frac{\pm 2\sqrt{3+3\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} + 3}{9} \right)$$

となりますが、 $R < 1$ なので、甲の半径は

$$\frac{-2\sqrt{3+3\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} + 3}{9} \text{です。}$$

補足1 $a_n = \frac{\sin(nx)}{\sin x}$ の値

n	a_n
1	1
2	$2 \cos(x)$
3	$2 \cos(2x) + 1$
4	$2 \cos(3x) + 2 \cos(x)$
5	$2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$
6	$2 \cos(5x) + 2 \cos(3x) + 2 \cos(x)$
7	$2 \cos(6x) + 2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$
8	$2 \cos(7x) + 2 \cos(5x) + 2 \cos(3x) + 2 \cos(x)$
9	$2 \cos(8x) + 2 \cos(6x) + 2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$
10	$2 \cos(9x) + 2 \cos(7x) + 2 \cos(5x) + 2 \cos(3x) + 2 \cos(x)$
11	$2 \cos(10x) + 2 \cos(8x) + 2 \cos(6x) + 2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$
12	$2 \cos(11x) + 2 \cos(9x) + 2 \cos(7x) + 2 \cos(5x) + 2 \cos(3x) + 2 \cos(x)$
13	$2 \cos(12x) + 2 \cos(10x) + 2 \cos(8x) + 2 \cos(6x) + 2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$
14	$2 \cos(13x) + 2 \cos(11x) + 2 \cos(9x) + 2 \cos(7x) + 2 \cos(5x) + 2 \cos(3x) + 2 \cos(x)$
15	$2 \cos(14x) + 2 \cos(12x) + 2 \cos(10x) + 2 \cos(8x) + 2 \cos(6x) + 2 \cos(4x) + 2 \cos(2x) + 1$

補足2

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} dx = \int \frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C(\text{定数})$$