問題1

(1) 2024/08/29 赤字を修正(積分区間が誤っていました)

根拠はないのですが、$\sqrt{1+\sin x}=t$と置換すると、

$$1+\sin x=t^2 \Rightarrow \cos x\,dx=2t\,dt \Rightarrow dx=\frac{2t}{\cos x}dt=\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}dt$$

なので、

$$与式=\int_1^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} t\cdot\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}dt=-\int_1^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}\frac{(2-t^2)'}{\sqrt{2-t^2}}dt=-\left[2\sqrt{2-t^2}\right]_1^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=3-\sqrt{3}$$

です。

(1) 別解 2024/08/29 追記

水野様より、ご指摘頂いたように、$\sin x=t$と置換してやってみました。

$$\sin x=t \Rightarrow \cos x\,dx=t\,dt \Rightarrow dx=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

なので、

$$与式=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1+t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt=-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{(1-t)'}{\sqrt{1-t}}dt$$

$$=-\left[2\sqrt{1-t}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3-\sqrt{3}$$

です。

(1) 別解 2024/08/29 追記

本質的には同じなのですが、置換せずにやると、

$$与式=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\sin x}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1-\sin x)'}{\sqrt{1-\sin x}}dx$$

$$=-\left[2\sqrt{1-\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=3-\sqrt{3}$$

です。

(2)前回の定積分の問題と同様に、積分区間の上下限を入れ替えて、定積分の関係式を導きます。

与式 $=\mathrm{I}$として、$\mathrm{t}=\pi-\mathrm{x}$とすると、$\mathrm{dx}=-\mathrm{dt}$なので、

$$\mathrm{I}=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-\mathrm{t})\sin\mathrm{t}}{3+\sin^2\mathrm{t}}\mathrm{dt}=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin\mathrm{x}}{3+\sin^2\mathrm{x}}\mathrm{dx}-\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{x}\sin\mathrm{x}}{3+\sin^2\mathrm{x}}\mathrm{dx}$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin\mathrm{x}}{3+\sin^2\mathrm{x}}\mathrm{dx}-\mathrm{I}\Rightarrow\mathrm{I}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\mathrm{x}}{3+\sin^2\mathrm{x}}\mathrm{dx}$$

となります。すると、

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\mathrm{x}}{3+\sin^2\mathrm{x}}\mathrm{dx}=\int_0^{\pi}\frac{\sin\mathrm{x}}{4+\cos^2\mathrm{x}}\mathrm{dx}=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2-\cos\mathrm{x}}+\frac{1}{2+\cos\mathrm{x}}\right)(\cos\mathrm{x})'\,\mathrm{dx}$$

$$=-\frac{1}{4}[-\log(2-\cos\mathrm{x})+\log(2+\cos\mathrm{x})]_0^{\pi}=\frac{\log 3}{2}$$

ですから、

$$\mathrm{I}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\log 3}{2}=\frac{\pi\log 3}{4}$$

です。

(3) こちらも$\mathrm{t}=-\mathrm{x}$とやって、積分区間の上下限を入れ替えると、

$$与式=-\int_0^{-1}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}}\mathrm{dt}=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}}\mathrm{dt}=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}\mathrm{dt}=\int_{-1}^{0}\frac{(1+\mathrm{e}^{\mathrm{t}})'}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}\mathrm{dt}$$

$$=[\log(1+\mathrm{e}^{\mathrm{t}})]_{-1}^{0}=\log 2-\log(1+\mathrm{e})+1$$

です。

(4) まず、被積分関数の一般項を求めます。

$$a_n = \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

として、いくつか計算すると、補足1のようになりました。この試行から、a_nとa_{n-2}の差に何らかの規則性があって、a_nはnの偶奇によって決まるかも？と見当がつきます。

nは自然数で、$\mathrm{a_1} = 1$ですが、0から始まっていると都合が良いので、$\mathrm{a_0} = 0$を拡張しておきます。

すると、$\mathrm{n} \geq 2$のとき、a_nとa_{n-2}の差は、

$$\begin{aligned} \mathrm{a_n - a_{n-2}} &= \frac{1}{\sin \mathrm{x}}\{\sin(\mathrm{nx}) - \sin((\mathrm{n}-2)\mathrm{x})\} \\ &= \frac{1}{\sin \mathrm{x}} \cdot 2\cos((\mathrm{n}-1)\mathrm{x}) \sin \mathrm{x} = 2\cos((\mathrm{n}-1)\mathrm{x}) \end{aligned}$$

です。

上記の考察から、nの偶奇で場合分けして、二項ずつペアーにして考えると、

nが偶数のとき

$$\begin{aligned} \mathrm{a_n - a_{n-2}} &= 2\cos((\mathrm{n}-1)\mathrm{x}) \\ \mathrm{a_{n-2} - a_{n-4}} &= 2\cos((\mathrm{n}-3)\mathrm{x}) \\ &\cdots \\ \mathrm{a_2 - a_0} &= 2\cos \mathrm{x} \end{aligned}$$

これらをすべて足し合わせると、

$$\mathrm{a_n - a_0} = 2\{\cos((\mathrm{n}-1)\mathrm{x}) + \cdots + \cos \mathrm{x}\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{a_n} = 2\{\cos((\mathrm{n}-1)\mathrm{x}) + \cdots + \cos \mathrm{x}\}$$

です。

nが奇数のとき

$$\begin{aligned} \mathrm{a_n - a_{n-2}} &= 2\cos((\mathrm{n}-1)\mathrm{x}) \\ \mathrm{a_{n-2} - a_{n-4}} &= 2\cos((\mathrm{n}-3)\mathrm{x}) \\ &\cdots \\ \mathrm{a_3 - a_1} &= 2\cos(2\mathrm{x}) \end{aligned}$$

これらをすべて足し合わせると、

$$\mathrm{a_n - a_1} = 2\{\cos((\mathrm{n}-1)\mathrm{x}) + \cdots + \cos(2\mathrm{x})\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{a_n} = 2\{\cos((\mathrm{n}-1)\mathrm{x}) + \cdots + \cos(2\mathrm{x})\} + 1$$

です。

ここで、$\mathrm{k} \geq 1$に対して、

$$\int_0^\pi \cos(kx)\,dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi = 0$$

なので、$\cos((\mathrm{n}-1)\mathrm{x}), \cdots, \cos x$の定積分値はすべて0です。

以上より、求める値は、次のようになります。

nが偶数のとき

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx = \int_0^\pi \mathrm{a_n}\,dx = 0$$

nが奇数のとき

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx = \int_0^\pi \mathrm{a_n}\,dx = \pi$$

(5) よいアイデアが浮かばなかったので、実直に原始関数F(x)を求めました。補足2を利用して、部分積分します。

$$\mathrm{F(x)} = \int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{dx} = \int \mathrm{x}\left(-\frac{1}{\tan \mathrm{x}}\right)'\mathrm{dx} = -\frac{\mathrm{x}}{\tan \mathrm{x}} + \int \frac{1}{\tan \mathrm{x}}\mathrm{dx}$$

ここで、

$$\int \frac{1}{\tan \mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int \frac{\cos \mathrm{x}}{\sin \mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int \frac{(\sin \mathrm{x})'}{\sin \mathrm{x}}\mathrm{dx} = \log(\sin \mathrm{x}) + \mathrm{C}(\text{定数})$$

なので、

$$\mathrm{F(x)} = -\frac{\mathrm{x}}{\tan \mathrm{x}} + \log(\sin \mathrm{x}) + \mathrm{C}(\text{定数})$$

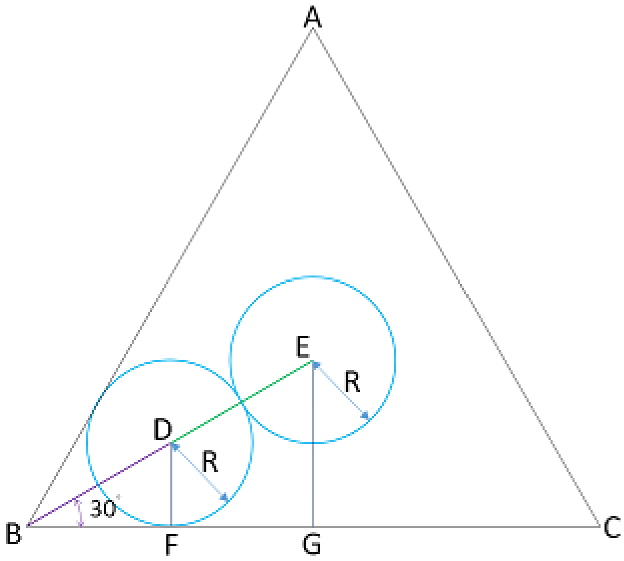
です。したがって、

$$\text{与式} = \lim_{\mathrm{a}\to\frac{\pi}{2}}[\mathrm{F(x)}]_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{a}}$$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{\mathrm{x}}{\tan \mathrm{x}} + \log(\sin \mathrm{x})\right\} - \left\{-\frac{\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} + \log\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{\pi + 2\log 2}{4}$$

です。

追加問題1



左図のように、甲の中心D, EからBCに垂直に下した点をそれぞれF, Gとします。そして、甲の半径をRとすると、

$$\mathrm{BF}+\mathrm{FG}=\mathrm{BG} \Rightarrow \frac{\mathrm{R}}{\tan 30^\circ}+2\mathrm{R}\cos 30^\circ=\frac{1}{2}$$

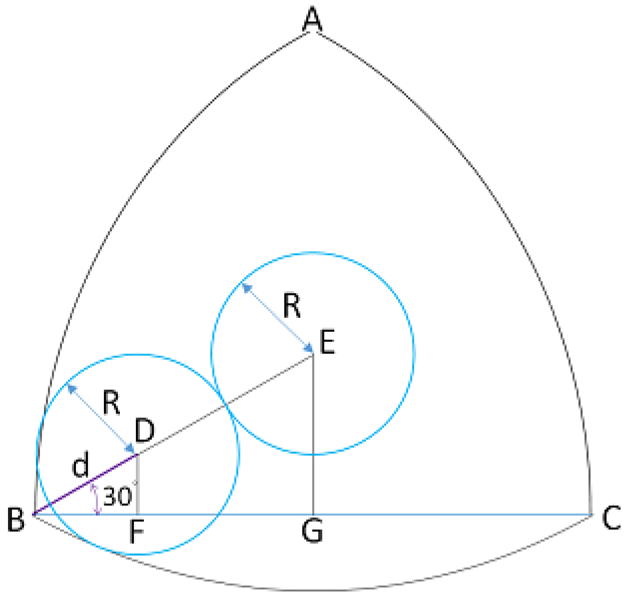
これを解いて、

$$\mathrm{R}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

となります。

よって、甲の半径は$\frac{\sqrt{3}}{12}$です。

追加問題2

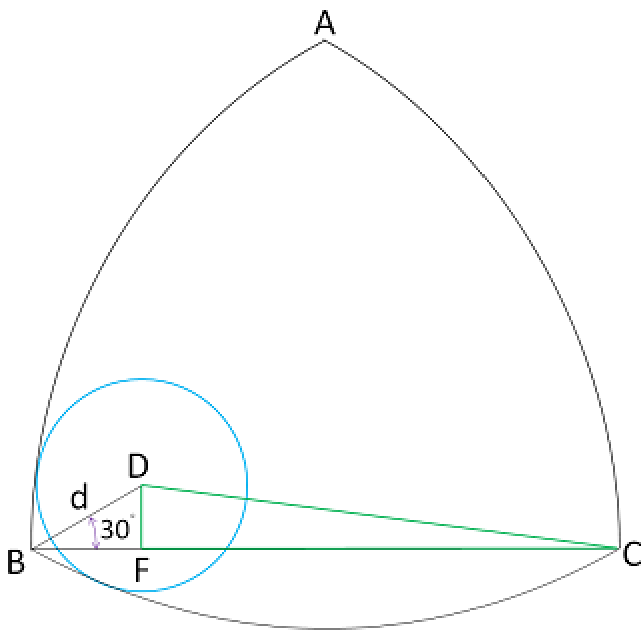


左図のように、甲の中心D, EからBCに垂直に下した点をそれぞれF, Gとします。そして、甲の半径をR、BD = dとすると、

$$\mathrm{BF} + \mathrm{FG} = \mathrm{BG}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\cos 30^\circ + 2\mathrm{R}\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdots ①$$

です。



また、⊿CDFに三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{DF}^2 + \mathrm{CF}^2 = \mathrm{CD}^2 \Rightarrow$$

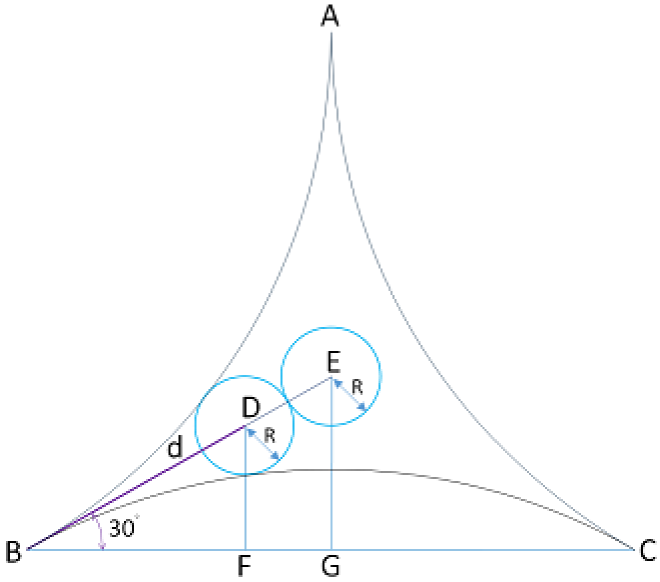
$$(\mathrm{d}\sin 30^\circ)^2 + (1 - \mathrm{d}\cos 30^\circ)^2 = (1 - \mathrm{R})^2 \cdots ②$$

です。①②を解くと、

$$(\mathrm{d}, \mathrm{R}) = \left(\frac{\pm 2\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3}+5} + 5\sqrt{3} + 6}{9}, \frac{\pm\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3}+5} - \sqrt{3} - 3}{9} \right)$$

となりますが、R > 0なので、甲の半径は $\frac{\sqrt{6}\sqrt{\sqrt{3}+5}-\sqrt{3}-3}{9}$ です。

追加問題3

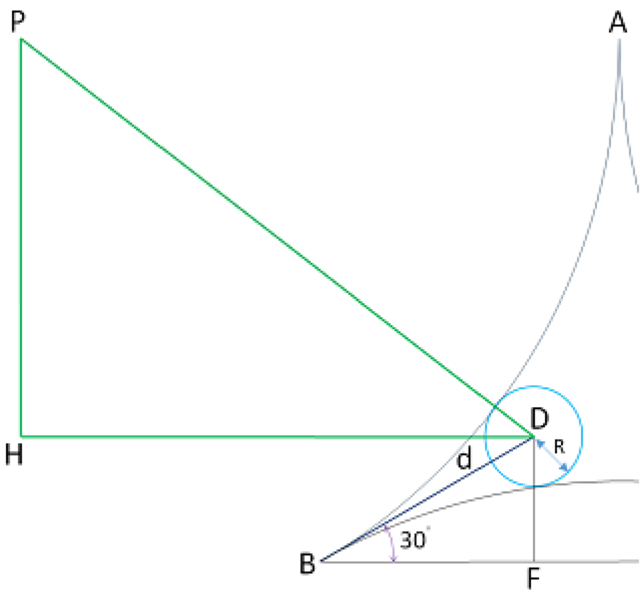


左図のように、甲の中心D, EからBCに垂直に下した点をそれぞれF, Gとします。そして、甲の半径をR、BD = dとすると、

$$\mathrm{BF}+\mathrm{FG}=\mathrm{BG}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\cos 30^\circ + 2\mathrm{R}\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdots ①$$

です。



また、弧BCの中心Pから垂直に引いた直線とDから水平に引いた直線の交点をPとします。そして、⊿DHPに三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{HP}^2+\mathrm{DH}^2=\mathrm{DP}^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{d}\sin 30^\circ\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\mathrm{d}\cos 30^\circ\right)^2$$

$$=(1+\mathrm{R})^2 \cdots ②$$

です。①②を解くと、

$$(\mathrm{d},\mathrm{R})=\left(\frac{\mp 4\sqrt{3+3\sqrt{3}}-\sqrt{3}-6}{9},\ \frac{\pm 2\sqrt{3+3\sqrt{3}}+2\sqrt{3}+3}{9}\right)$$

となりますが、R < 1なので、甲の半径は

$\frac{-2\sqrt{3+3\sqrt{3}}+2\sqrt{3}+3}{9}$です。

補足1 $\mathbf{a_n} = \frac{\sin(nx)}{\sin x}$の値

n	a_n
1	1
2	$2\cos(x)$
3	$2\cos(2x) + 1$
4	$2\cos(3x) + 2\cos(x)$
5	$2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1$
6	$2\cos(5x) + 2\cos(3x) + 2\cos(x)$
7	$2\cos(6x) + 2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1$
8	$2\cos(7x) + 2\cos(5x) + 2\cos(3x) + 2\cos(x)$
9	$2\cos(8x) + 2\cos(6x) + 2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1$
10	$2\cos(9x) + 2\cos(7x) + 2\cos(5x) + 2\cos(3x) + 2\cos(x)$
11	$2\cos(10x) + 2\cos(8x) + 2\cos(6x) + 2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1$
12	$2\cos(11x) + 2\cos(9x) + 2\cos(7x) + 2\cos(5x) + 2\cos(3x) + 2\cos(x)$
13	$2\cos(12x) + 2\cos(10x) + 2\cos(8x) + 2\cos(6x) + 2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1$
14	$2\cos(13x) + 2\cos(11x) + 2\cos(9x) + 2\cos(7x) + 2\cos(5x) + 2\cos(3x) + 2\cos(x)$
15	$2\cos(14x) + 2\cos(12x) + 2\cos(10x) + 2\cos(8x) + 2\cos(6x) + 2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1$

補足2

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C(\text{定数})$$