445回　よふかしのつらいおじさん

(1)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx$$

ここで、$\sin x=t$ とおくと、$\cos x\ dx=dt$、

$x:0\to\frac{\pi}{3}$ のとき、$t:0\to\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t}}=-2\left[\sqrt{1-t}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-2\left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}-1\right)$$

$$=-2\left(\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}-1\right)=-2\left\{\sqrt{\frac{(3+1)-2\sqrt{3\times 1}}{4}}-1\right\}=-2\times\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-1\right)$$

$$=-2\times\frac{\sqrt{3}-3}{2}=3-\sqrt{3}$$

(2)

前回の(3)と同様に考えます。

$y=\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}$ と $y=\frac{(\pi-x)\sin x}{3+\sin^2 x}$ とが、$x=\frac{\pi}{2}$ 対称なので、和の積分を考えます。

$$2I=\int_0^{\pi}\frac{x\ \sin x}{3+\sin^2 x}\,dx+\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\ \sin x}{3+\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{3+1-\cos^2 x}\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(2+\cos x)(2-\cos x)}\,dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}+\frac{\sin x}{2-\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[-\log(2+\cos x)+\log(2-\cos x)\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}\{(-\log 1+\log 3)-(-\log 3+\log 1)\}=\frac{\pi\log 3}{2}$$

よって、

$$I=\frac{\pi\log 3}{4}$$

(3)

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}\,dx=\int_0^1\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\,dx$$

$$=[x-\log(1+e^x)]_0^1=1-\log(1+e)-(0-\log 2)=\log\frac{2e}{e+1}$$

(4)

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin(n-1)x \cdot \cos x + \cos(n-1)x \cdot \sin x}{\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin(n-1)x \cdot \cos x}{\sin x}\,dx + \int_0^\pi \cos(n-1)x\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\{\sin(n-2)x \cdot \cos x + \cos(n-2)x \cdot \sin x\} \cdot \cos x}{\sin x}\,dx + \frac{1}{n-1}[\sin(n-1)x]_0^\pi$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin(n-2)x \cdot \cos^2 x + \cos(n-2)x \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin x}\,dx + 0$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin(n-2)x \cdot (1-\sin^2 x) + \cos(n-2)x \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin(n-2)x}{\sin x}\,dx + \int_0^\pi \{-\sin(n-2)x \cdot \sin x + \cos(n-2)x \cdot \cos x\}\,dx$$

$$= I_{n-2} + \int_0^\pi \cos(n-1)x\,dx = I_{n-2}$$

つまり、$I_n = I_{n-2}$

ここで、

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\sin 1x}{\sin x}\,dx = \int_0^\pi 1\,dx = [x]_0^\pi = \pi$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx = \int_0^\pi \frac{2\sin x \cos x}{\sin x}\,dx = 2\int_0^\pi \cos x\,dx = 2[\sin x]_0^\pi = 0$$

よって、

$$I_n = \begin{cases} \pi & (n\text{が奇数}) \\ 0 & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$

(5)

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

なので、

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \left(\frac{-1}{\tan x}\right)'\,dx = \left[\frac{-x}{\tan x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\tan x}\,dx = \left[\frac{-x}{\tan x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$= \left[\frac{-x}{\tan x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \left[\frac{-x}{\tan x} + \log\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left\{\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} + \log 1\right) - \left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{1} + \log\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{4} + 0 - \frac{1}{2}\log 2\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$$

追加

問題１

円甲の半径をｋとします。

△BLN と△BKM は、互いに相似で∠B＝30°　の直角三角形です。

$BL : LN = 2 : 1$ 、$LN = k$ なので、$BL = 2k$ です。

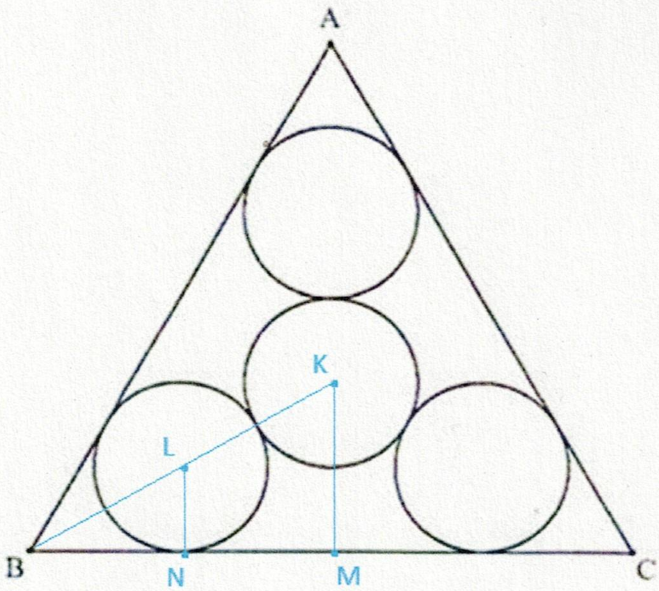
$BK = 4k$ なので、$KM = 2k$、$BM = 2\sqrt{3}k$ です。

一方、BM は、一辺の半分なので、$BM = \frac{1}{2}$ です。

よって、

$$2\sqrt{3}k = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

よって、円甲の半径は、$\frac{\sqrt{3}}{12} = 0.1443\cdots$



問題２

図のように、頂点Ｂを原点、直線 BC をＸ軸とするような座標を考えます。

円甲の半径をｋとします。

△ABC は、１辺の長さが１の正方形なので、AM の長さが、$\frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

点Ｋは△ABC の重心なので、$AK:KM = 2:1$ です。

点Ｋ、Ｌの座標を、次のようにおきます。

$$K\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)、L\left(t, \frac{\sqrt{3}}{3}t\right)$$

すると、KL の長さは２ｋ、CL の長さは(1－ｋ)なので、

$$\begin{cases} KL = 2k \\ CL = 1-k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}-t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2 = (2k)^2 \\ (1-t)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2 = (1-k)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-t\right)^2 = k^2 \\ \frac{4}{3}t^2 - 2t = k^2 - 2k \end{cases}$$

ここで、$k>0$ で、$\frac{1}{2}>t$なので

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}-t = \sqrt{3}k \\ k^2 - 2k = \frac{4}{3}t^2 - 2t \end{cases}$$

$t=\frac{1}{2}-\sqrt{3}k$ を下の式に入れると、

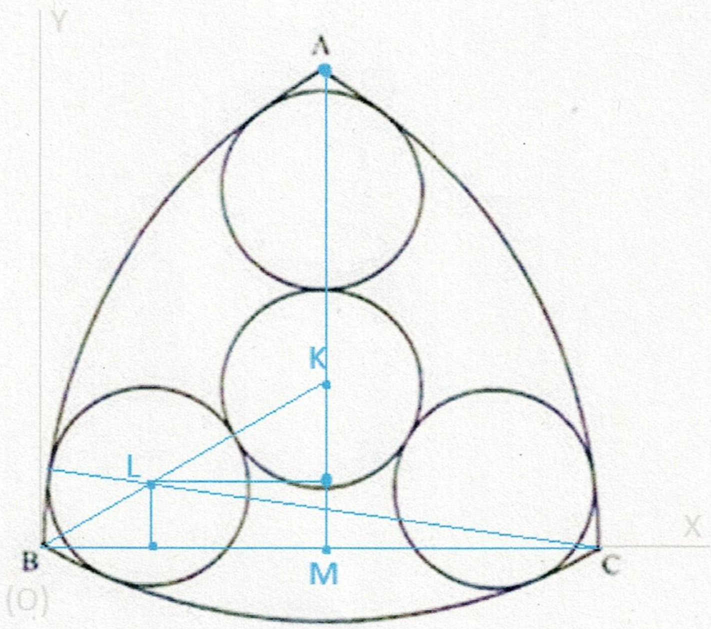
$$k^2-2k=\frac{4}{3}t^2-2t \quad \rightarrow \quad k^2-2k=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}k\right)^2-2\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}k\right)$$

$$\rightarrow \quad 9k^2+2\left(3+\sqrt{3}\right)k-2=0$$

$$\rightarrow \quad k=\frac{1}{9}\left\{-\left(3+\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2+18}\right\}$$

$$\rightarrow \quad k=\frac{1}{9}\left\{-\left(3+\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2+18}\right\} \quad (k>0\text{より})$$

$$=\frac{1}{9}\left\{-\left(3+\sqrt{3}\right)+\sqrt{30+6\sqrt{3}}\right\}=0.1803\cdots$$



問題 3

図のように、頂点 B を原点、直線 BC を X 軸とするような座標を考えます。

円甲の半径を k とします。

点K、L、Pの座標を、次のようにおきます。

$K\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$、$L\left(t,\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)$、$P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

すると、KLの長さは2k、PLの長さは(1+k)なので、

$$\begin{cases} KL = 2k \\ PL = 1+k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}-t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2 = (2k)^2 \\ \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (1+k)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-t\right)^2 = k^2 \\ \frac{4}{3}t^2 = k^2+2k \end{cases}$$

ここで、$k>0$で、$\frac{1}{2}>t$なので

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}-t = \sqrt{3}k \\ k^2+2k = \frac{4}{3}t^2 \end{cases}$$

$t=\frac{1}{2}-\sqrt{3}k$ を下の式に入れると、

$$k^2+2k = \frac{4}{3}t^2 \rightarrow k^2+2k = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}k\right)^2 \rightarrow 9k^2-2\left(3+2\sqrt{3}\right)k+1=0$$

$$\rightarrow k = \frac{1}{9}\left\{\left(3+2\sqrt{3}\right) \pm \sqrt{\left(3+2\sqrt{3}\right)^2-9}\right\}$$

$$\rightarrow k = \frac{1}{9}\left\{\left(3+2\sqrt{3}\right) \pm \sqrt{12+12\sqrt{3}}\right\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{9}\left\{\left(3+2\sqrt{3}\right)+2\sqrt{3+3\sqrt{3}}\right\} = 1.3544\cdots \\ \frac{1}{9}\left\{\left(3+2\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3+3\sqrt{3}}\right\} = 0.0820\cdots \end{cases}$$