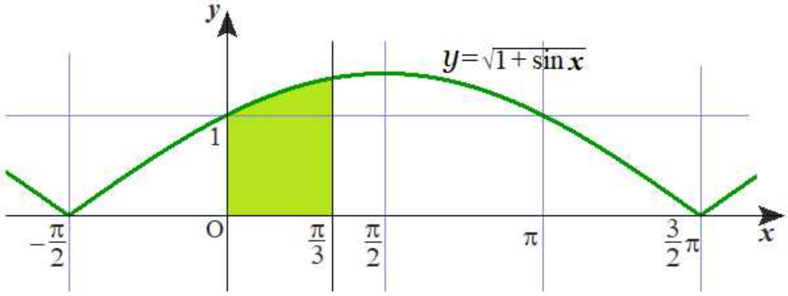
● 問題 445 解答＜三角定規＞

(1) $I=\int_0^{\pi/3}\sqrt{1+\sin(x)}\,dx$

$1+\sin(x)=u$ と置くと，$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow u\in\left[1,\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\cos(x)dx=du,\ \cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}=\sqrt{1-(u-1)^2}=\sqrt{2u-u^2},\ dx=\frac{du}{\cos(x)}=\frac{du}{\sqrt{2u-u^2}}$

$\therefore\ I=\int_1^{1+\sqrt{3}/2}\sqrt{u}\cdot\frac{du}{\sqrt{2u-u^2}}=\int_1^{1+\sqrt{3}/2}\frac{du}{\sqrt{2-u}}=\left[-2\sqrt{2-u}\,\right]_1^{1+\sqrt{3}/2}=\mathbf{3-\sqrt{3}}$ …[答]



(2) $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{3+\sin^2(x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{4-\cos^2(x)}dx$

$\cos(x)=u$ と置くと，$x\in[0,\ \pi] \Leftrightarrow u\in[1,\ -1],\ -\sin(x)dx=du,\ x=\cos^{-1}(u)$

$\therefore\ I=\int_{-1}^{1}\frac{\cos^{-1}(u)}{4-u^2}du=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)\cos^{-1}(u)du$

$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\{\log(2+u)-\log(2-u)\}'\cos^{-1}(x)dx$ ←上式を部分積分

$=\frac{1}{4}\left[\log\frac{2+u}{2-u}\cdot\cos^{-1}(u)\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\{\log(2+u)-\log(2-u)\}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$ …(#)

ここで $\log(2+u)-\log(2-u)$ は奇関数であり $\sqrt{1-u^2}$ は偶関数だから，積は奇関数。

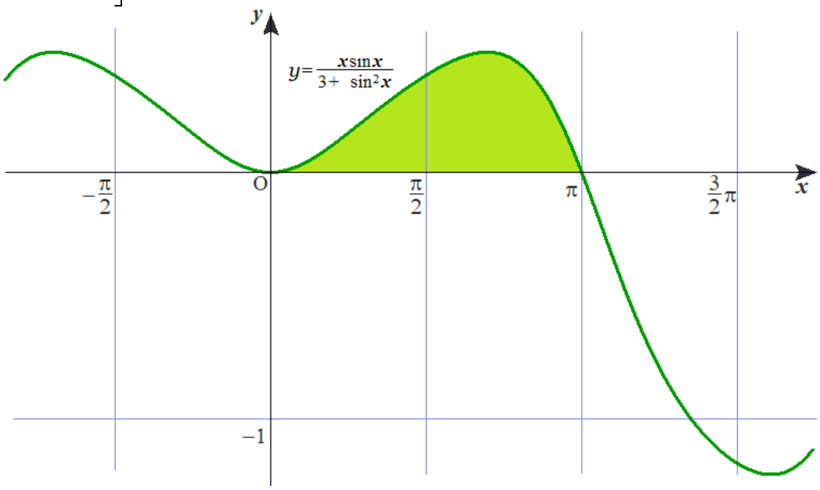
よって，(#)式の第 2 項の積分部分は $=0$。

$\therefore\ I=\frac{1}{4}\left[\log(3)\cdot\cos^{-1}(1)-\log\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\cos^{-1}(-1)\right]$

$=\frac{1}{4}\cdot\log(3)\cdot\pi$

$=\mathbf{\frac{\pi}{4}\log(3)}$

$(=0.8628\cdots)$ …[答]



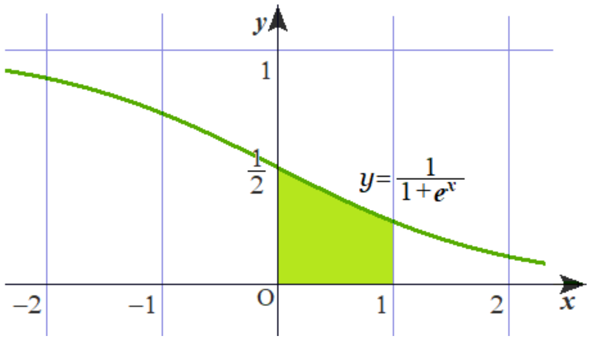
(3) $I=\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e^{2x}}dx$

$e^x=u$ と置くと，$e^x dx=du$, $x\in[0,\ 1] \Leftrightarrow u\in[1,\ e]$

$\therefore\ I=\int_1^e \frac{du}{u+u^2}=\int_1^e \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du$

$=[\log u-\log(u+1)]_1^e$

$=\mathbf{1+\log\frac{2}{e+1}}$ $(=0.3798\cdots)$ …[答]



(4) $I_n=\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}dx$

$\sin(nx)=\sin((n-2)x+2x)=\sin((n-2)x)\cos(2x)+\cos((n-2)x)\sin(2x)$

$=\sin((n-2)x)(1-2\sin^2(x))+2\cos((n-2)x)\sin(x)\cos(x)$

$=\sin((n-2)x)+2\sin(x)(\cos((n-2)x)\cos(x)-\sin((n-2)x)\sin(x))$

であるから $\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}=\frac{\sin((n-2)x)}{\sin(x)}+2\cos((n-1)x)$

$\therefore\ I_n=I_{n-2}+2\int_0^{\pi}\cos((n-1)x)dx$

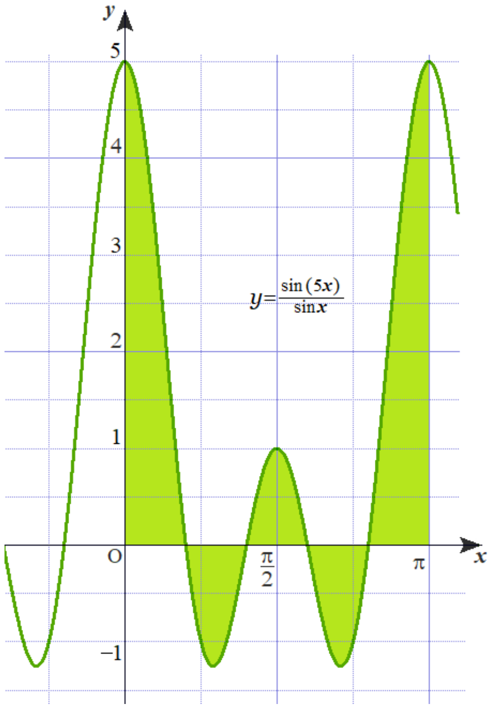
ここで $\int_0^{\pi}\cos((n-1)x)dx=\left[\frac{1}{n-1}\sin((n-1)x)\right]_0^{\pi}=0$

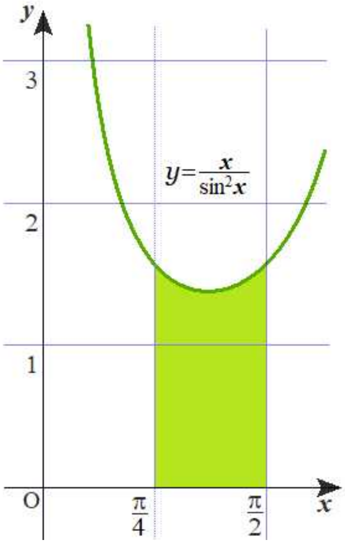
であるから $I_n=I_{n-2}$ 。

以上より，n が偶数のとき $I_n=\cdots=I_0=\mathbf{0}$

n が奇数のとき $I_n=\cdots=I_1=\boldsymbol{\pi}$ …[答]

（図は $n=5$ の場合→）





(5) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{x}{\sin^2(x)}dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}(-\cot(x))'x dx=-\left[\frac{x}{\tan(x)}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$

$=\frac{\pi}{4}+[\log(\sin(x))]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2}$ $(=1.132\cdots)$ …[答]

《追加問題》

［問題１］右 図１のように各点を定める。甲円の半径を r とする。

$\angle FAG=30^\circ$ だから　$AE=2r,\ EG=2r,\ AG=4r$。

$AF=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AG$ だから，$4r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　$\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$　…[答]

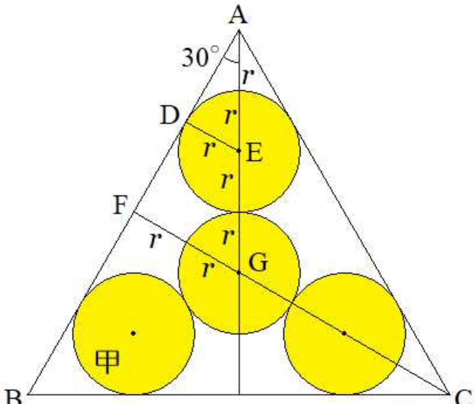


図１

［問題２］右 図２のように各点を定める。甲円の半径を r とする。

$CE=1,\ CD=1-r$。$FG=\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ DF=2r+\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ CF=\dfrac{1}{2}$。

$$\therefore\ (1-r)^2=\left(2r+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

整理して　$9r^2+2(3+\sqrt{3})r-2=0$

$r>0$ でこれを解いて，$r=\dfrac{-(3+\sqrt{3})+\sqrt{30+6\sqrt{3}}}{9}$　…[答]

$(=0.180\cdots)$

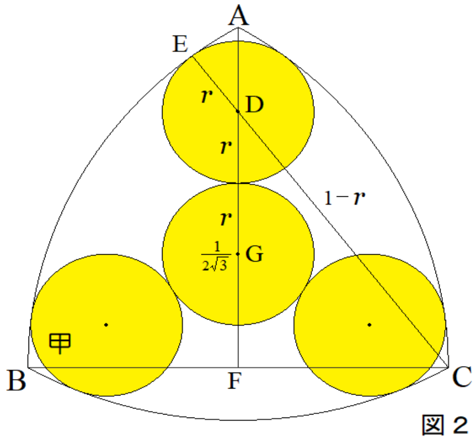


図２

［問題３］右 図３のように各点を定める。甲円の半径を r とする。

$DE=1+r,\ EF=\sqrt{3}\,r,\ AG=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ AF=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+r$

$DF=AD-AF=\sqrt{3}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}+r\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-r$

$$\therefore\ \left(\sqrt{3}\,r\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-r\right)^2=(1+r)^2$$

整理して　$9r^2-2(3+2\sqrt{3})r+1=0$

$r<1$ でこれを解いて　$r=\dfrac{3+2\sqrt{3}-2\sqrt{3(1+\sqrt{3})}}{9}$　…[答]

$(=0.0820\cdots)$

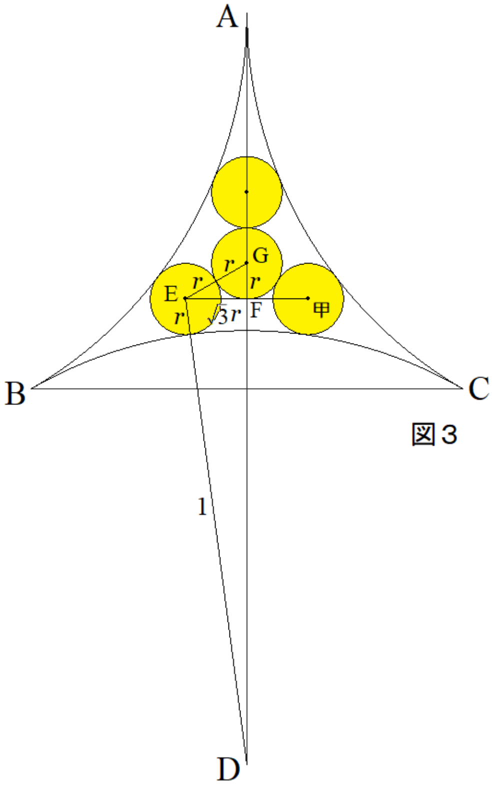


図３