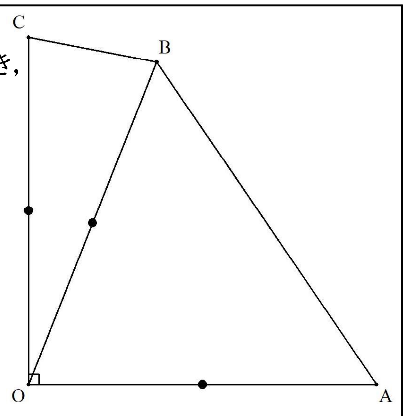
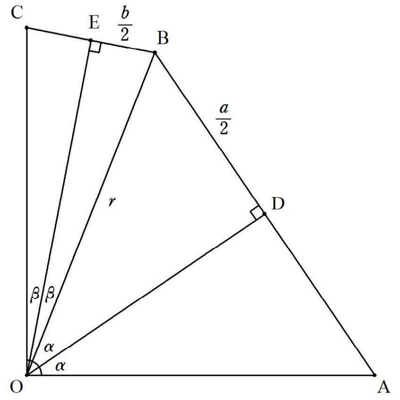
第 446 回

問題 1

∠AOC＝90° の四角形 OABC において，OA＝OB＝OC，AB＝３，BC＝１のとき，四角形 OABC の面積を求めよ。



解答　OA＝OB＝OC＝r，AB＝a，BC＝b とおいて考える。



AB，BC の中点をそれぞれ D，E とし，

∠BOD＝α，∠BOE＝β とおくと，$2\alpha+2\beta=90°$ より，$\alpha+\beta=45°$　…①

△BOD について，BD＝$\dfrac{a}{2}$ より，$\sin\alpha=\dfrac{a}{2r}$　…②

△BOE について，BE＝$\dfrac{b}{2}$ より，$\sin\beta=\dfrac{b}{2r}$　…③

①より，$\sin\alpha=\sin(45°-\beta)=\sin45°\cos\beta-\cos45°\sin\beta=\dfrac{\cos\beta-\sin\beta}{\sqrt{2}}$

整理すると，$\sqrt{2}\sin\alpha+\sin\beta=\cos\beta$

両辺を２乗すると，$(\sqrt{2}\sin\alpha+\sin\beta)^2=1-\sin^2\beta$

②，③を代入すると，$\left(\sqrt{2}\cdot\dfrac{a}{2r}+\dfrac{b}{2r}\right)^2=1-\left(\dfrac{b}{2r}\right)^2$　　$r^2=\dfrac{a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2}{2}$　…④

△BOD に三平方の定理を適用して，OD＝$\sqrt{r^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2}{2}-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ (∵④) $=\dfrac{a+\sqrt{2}\,b}{2}$

△BOE に三平方の定理を適用して，OE＝$\sqrt{r^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2}{2}-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2}$ (∵④) $=\dfrac{\sqrt{2}\,a+b}{2}$

よって，

四角形 OABC＝△OAB＋△OBC＝$\dfrac{1}{2}a\cdot$OD＋$\dfrac{1}{2}b\cdot$OE＝$\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{a+\sqrt{2}\,b}{2}+\dfrac{1}{2}b\cdot\dfrac{\sqrt{2}\,a+b}{2}$

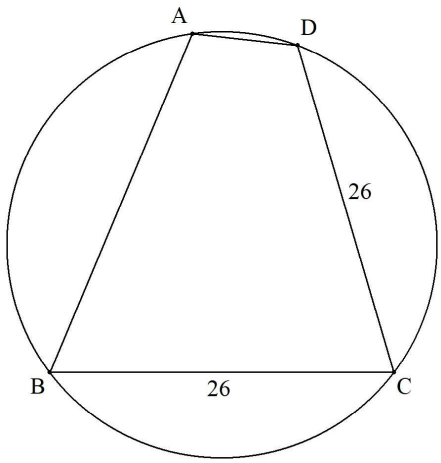
$=\dfrac{a^2+2\sqrt{2}\,ab+b^2}{4}$ 公式

$a=3$，$b=1$ のとき，公式により，四角形 OABC＝$\dfrac{3^2+2\sqrt{2}\cdot3\cdot1+1^2}{4}=\dfrac{5+3\sqrt{2}}{2}$　答

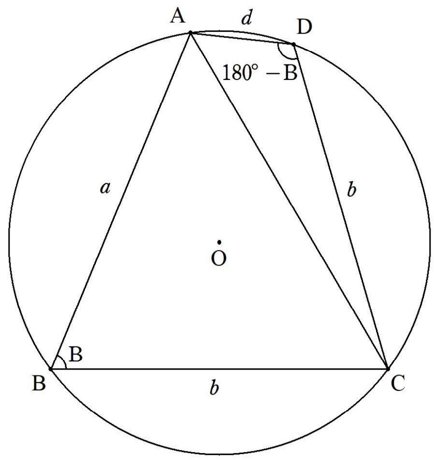
問題 2　(東京大学入試問題の類題)

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{4}$ の円に内接している。

この四角形の周囲の長さが 88 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 26 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。



解答　円を O(R)，周囲の長さ $2s$，BC=CD= b と一般化し，AB= a，DA= d とおく。



$2s=a+b+b+d$ より，$d=2(s-b)-a$

∠ABC=B とおくと，∠CDA=180°−B であるから，

△ABC と△ADC に余弦定理を適用して，

$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B=b^2+d^2+2bd\cos B$

$$\therefore \cos B=\frac{a^2-d^2}{2b(a+d)}=\frac{a-d}{2b}=\frac{a-\{2(s-b)-a\}}{2b}=\frac{a+b-s}{b}\quad \cdots①$$

このとき，

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{a+b-s}{b}=-a^2+2a(s-b)+b^2\quad \cdots②$$

△ABC に正弦定理を適用すると，AC= $2R\sin B$

両辺を 2 乗すると，$AC^2=4R^2(1-\cos^2 B)$

これに①，②を代入すると，$-a^2+2a(s-b)+b^2=4R^2\left\{1-\left(\dfrac{a+b-s}{b}\right)^2\right\}$

両辺に b^2 を掛けて a について整理すると，$(4R^2-b^2)a^2-2(s-b)(4R^2-b^2)a+b^4-8bR^2s+4R^2s^2=0$

両辺を $4R^2-b^2$ で割ると，$a^2-2(s-b)a+\dfrac{4R^2(s-b)^2}{4R^2-b^2}-b^2=0\quad \cdots③$

$$(\because)\quad \frac{b^4-8bR^2s+4R^2s^2}{4R^2-b^2}=\frac{4R^2(s^2-2bs+b^2-b^2)+b^4}{4R^2-b^2}=\frac{4R^2(s-b)^2-4b^2R^2+b^4}{4R^2-b^2}=\frac{4R^2(s-b)^2}{4R^2-b^2}-b^2$$

a についての 2 次方程式の判別式を D とおくと，

$$\frac{D}{4}=(s-b)^2-\left\{\frac{4R^2(s-b)^2}{4R^2-b^2}-b^2\right\}=\frac{4R^2(s-b)^2-b^2(s-b)^2-4R^2(s-b)^2+4b^2R^2-b^4}{4R^2-b^2}$$

$$=\frac{b^2\{-(s-b)^2+4R^2-b^2\}}{4R^2-b^2}=b^2\left\{1-\frac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}\right\}$$ であるから，③より，

$$\therefore a=s-b\pm b\sqrt{1-\frac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}$$

よって，

$$a=s-b-b\sqrt{1-\frac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}\ ,\quad d=s-b+b\sqrt{1-\frac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}$$

または，

$a = s-b + b\sqrt{1-\dfrac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}$, $d = s-b - b\sqrt{1-\dfrac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}$

問題 2 では，$R=\dfrac{65}{4}$ ，$2s=88$ ，$b=26$ であるから，

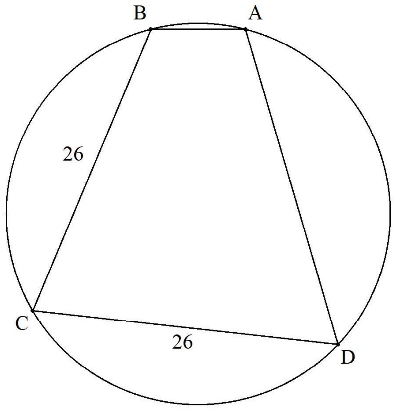
$a=8$，$d=28$ または $a=28$，$d=8$

答　AB＝8，DA＝28 または，AB＝28，DA＝8

問題 2　（東京大学入試問題の類題）

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{4}$ の円に内接している。

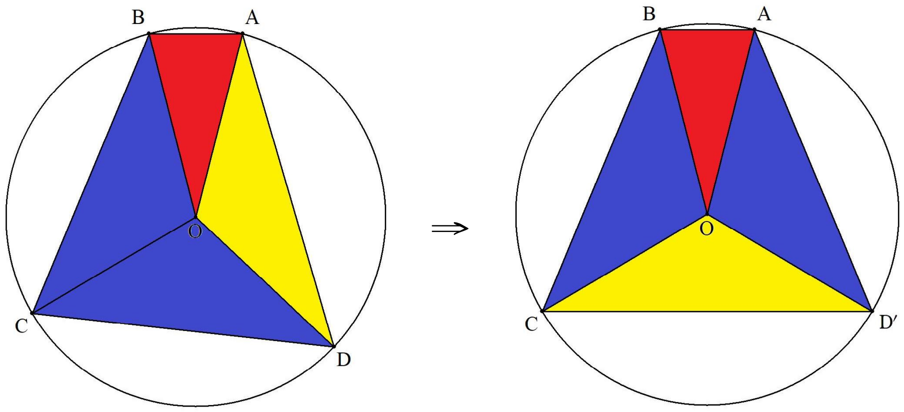
この四角形の周囲の長さが 88 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 26 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。



別解　円を O(R)，周囲の長さ $2s$ ，BC＝CD＝ b と一般化し，AB＝ a ，DA＝ d とおく。

$2s=a+b+b+d$ より，$d=2(s-b)-a$

まず，四角形 ABCD の△OCD と△ODAを入れ換えて四角形 ABCD′ をつくると，面積は変わらず等脚台形となる。



等脚台形 ABCD′ の A，B から CD′ に下した垂線の足をそれぞれ E，F とする。

∠ABC＝B とおくと，∠CD′A＝180°－B であるから，

△ABC と△AD′C に余弦定理を適用して，

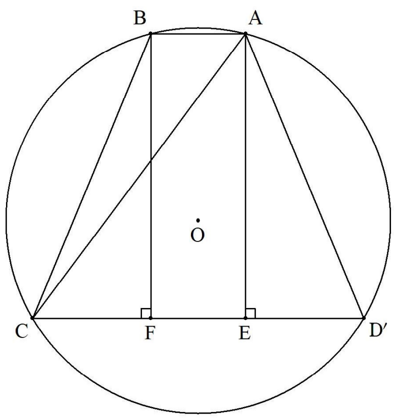
$AC^2 = a^2+b^2-2ab\cos B = b^2+d^2+2bd\cos B$

$\therefore \cos B = \dfrac{a^2-d^2}{2b(a+d)} = \dfrac{a-d}{2b} = \dfrac{a-\{2(s-b)-a\}}{2b} = \dfrac{a+b-s}{b}$

$AC^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\dfrac{a+b-s}{b} = -a^2+b^2+2a(s-b)$

AC＞0 より，$AC=\sqrt{-a^2+b^2+2a(s-b)}$　…①

また，$CF=\dfrac{d-a}{2} = s-a-b$ より，



△BCF に三平方の定理を適用して，BF= $\sqrt{b^2-(s-a-b)^2}$

△ABC= $\dfrac{1}{2}$ AB・BF= $\dfrac{1}{2}a\sqrt{b^2-(s-a-b)^2}$ …②

一般に，△ABC の外接円の半径を R，面積を S とすると，$2R=\dfrac{a}{\sin A}$，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ より，$S=\dfrac{abc}{4R}$

これに①，②を代入すると，$\dfrac{1}{2}a\sqrt{b^2-(s-a-b)^2}=\dfrac{ab\sqrt{-a^2+b^2+2a(s-b)}}{4R}$

整理すると，$2R\sqrt{b^2-(s-a-b)^2}=b\sqrt{-a^2+b^2+2a(s-b)}$

両辺を 2 乗して，a について整理すると，$a^2-2(s-b)a+\dfrac{4R^2(s-b)^2}{4R^2-b^2}-b^2=0$ （途中計算省略）

$\therefore a=s-b\pm b\sqrt{1-\dfrac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}$

よって，

$a=s-b-b\sqrt{1-\dfrac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}$，$d=s-b+b\sqrt{1-\dfrac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}$

または，

$a=s-b+b\sqrt{1-\dfrac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}$，$d=s-b-b\sqrt{1-\dfrac{(s-b)^2}{4R^2-b^2}}$

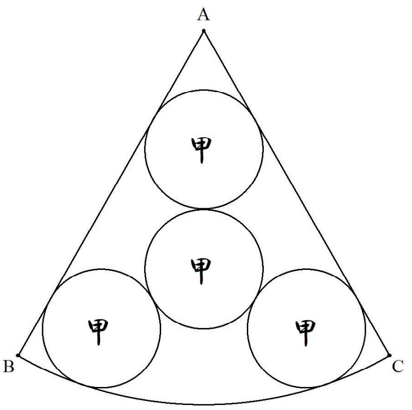
問題 2 では，$R=\dfrac{65}{4}$，$2s=88$，$b=26$ であるから，

$a=8$, $d=28$ または $a=28$, $d=28$

答 AB= 8，DA= 28 または，AB= 28，DA= 8

追加問題 1

A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，
弧 BC は半径 1 の円弧である。
弧 BC，CA，AB で囲まれた図形の中に甲円 4 個
を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。



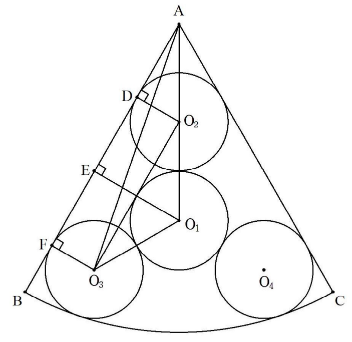
解答 4 個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，
図のように記号を付ける。

AD=DE=EF= $\sqrt{3}r$ より，AF= $3\sqrt{3}r$

また，$FO_2=r$，$O_2A=1-r$ であるから，$\triangle AFO_2$ に三平方の定理を適用して，

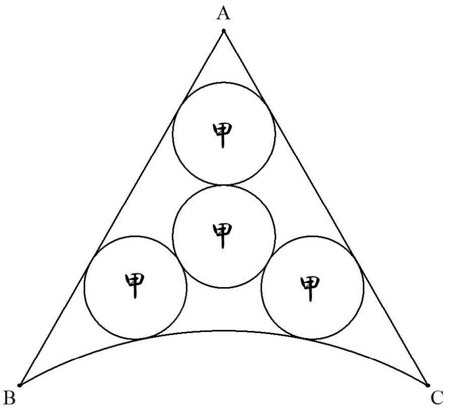
$(3\sqrt{3}r)^2+r^2=(1-r)^2$ $\quad 27r^2+2r-1=0$ $\quad r=\dfrac{-1\pm2\sqrt{7}}{27}$

$r>0$ より，$r=\dfrac{-1+2\sqrt{7}}{27}$ （≒ 0.158945） 答



追加問題 2

A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，
弧 BC は半径 1 の円弧である。
弧 BC，CA，AB で囲まれた図形の中に甲円 4 個
を図のように配置する。
甲円の半径を求めよ。

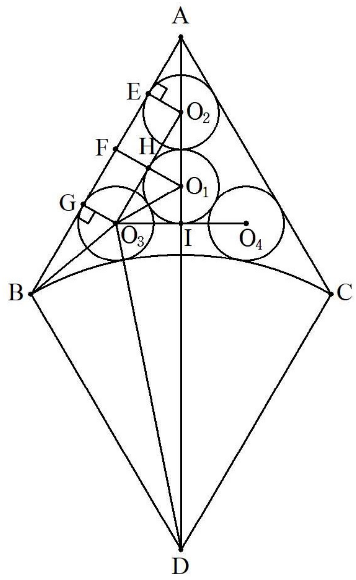


解答　4 個の甲円を図のように $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，$O_4(r)$ とおき，
図のように記号を付ける。△BCD は正三角形である。
$AO_2 = O_2O_1 = 2r$，$O_1I = r$，$AD = \sqrt{3}$ より，$ID = \sqrt{3} - 5r$
また，$IO_3 = \sqrt{3}r$，$O_3D = 1 + r$ であるから，$\triangle DIO_3$ に三平方の定理を適用して，
$(\sqrt{3} - 5r)^2 + (\sqrt{3}r)^2 = (1 + r)^2$　　$27r^2 - 2(1 + 5\sqrt{3})r + 2 = 0$

$$r = \frac{1 + 5\sqrt{3} \pm \sqrt{22 + 10\sqrt{3}}}{27}$$

題意に適するのは，　$r = \dfrac{1 + 5\sqrt{3} - \sqrt{22 + 10\sqrt{3}}}{27}$　（$\fallingdotseq 0.125542$）　答

（$\dfrac{1 + 5\sqrt{3} + \sqrt{22 + 10\sqrt{3}}}{27} \fallingdotseq 0.59$）



（2024/9/15　ジョーカー）