問題1

$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OB}^2=\mathrm{OC}^2=\mathrm{a}$、$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$、$\angle\mathrm{BOC}=\beta$として、⊿AOBと⊿BOCに余弦定理を適用すると、

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{a}+\mathrm{a}-3^2}{2\sqrt{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{a}}}=\frac{2\mathrm{a}-9}{2\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cos\beta\Rightarrow\cos\beta=\frac{\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}}=\frac{\mathrm{a}+\mathrm{a}-1^2}{2\sqrt{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{a}}}=\frac{2\mathrm{a}-1}{2\mathrm{a}}$$

となるので、

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2\mathrm{a}-9}{2\mathrm{a}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{4\mathrm{a}-9}}{2\mathrm{a}}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{2\mathrm{a}-1}{2\mathrm{a}}\right)^2}=\frac{\sqrt{4\mathrm{a}-1}}{2\mathrm{a}}$$

です。ここで、$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$なので、

$$\cos(\alpha+\beta)=0\Rightarrow\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0\Rightarrow(\cos\alpha\cos\beta)^2=(\sin\alpha\sin\beta)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2\mathrm{a}-9}{2\mathrm{a}}\cdot\frac{2\mathrm{a}-1}{2\mathrm{a}}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{4\mathrm{a}-9}}{2\mathrm{a}}\cdot\frac{\sqrt{4\mathrm{a}-1}}{2\mathrm{a}}\right)^2\Rightarrow2\mathrm{a}^2-20\mathrm{a}+41=0\Rightarrow\mathrm{a}=\frac{10\pm3\sqrt{2}}{2}$$

ですが、$\mathrm{a}=\frac{10-\sqrt{2}}{2}$とすると、

$$\cos\alpha=\frac{2\cdot\frac{10-3\sqrt{2}}{2}-9}{\frac{10-3\sqrt{2}}{2}}=\frac{8-27\sqrt{2}}{82}<0\Rightarrow\alpha>\frac{\pi}{2}$$

となり、これは不適なので、$\mathrm{a}=\frac{10+\sqrt{2}}{2}$です。

次に、⊿ABCの面積Sは、

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\alpha+\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin\beta=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{a}}\frac{3\sqrt{4\mathrm{a}-9}}{2\mathrm{a}}+\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{a}}\frac{\sqrt{4\mathrm{a}-1}}{2\mathrm{a}}$$

$$=\frac{\sqrt{4\mathrm{a}-1}+3\sqrt{4\mathrm{a}-9}}{4}$$

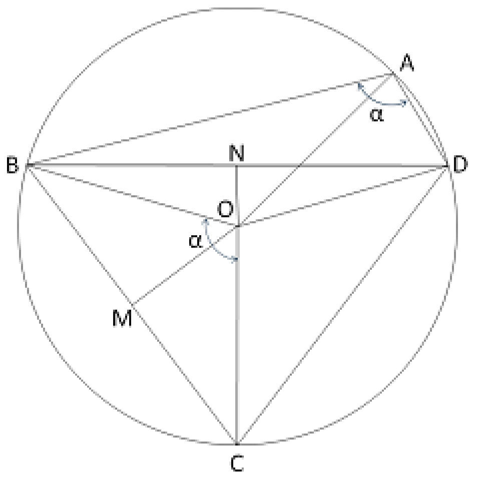
と表せますが、これに$\mathrm{a}=\frac{10+\sqrt{2}}{2}$を代入して、

$$\mathrm{S}=\frac{\sqrt{4\cdot\frac{10+\sqrt{2}}{2}-1}+3\sqrt{4\cdot\frac{10+\sqrt{2}}{2}-9}}{4}=\frac{5+3\sqrt{2}}{2}$$

です。以上より、四角形OABCの面積は$\frac{5+3\sqrt{2}}{2}$です。

問題2

右図のように、円の中心OからBCに垂直に下した点をM、BDに垂直に下した点をNとします。そして、⊿OCMに三平方の定理を適用すると、



$$\mathrm{OM}^2+\mathrm{CM}^2=\mathrm{OC}^2 \Rightarrow \mathrm{OM}^2+\left(\frac{\mathrm{BC}}{2}\right)^2=\mathrm{OC}^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{OM}^2+\left(\frac{26}{2}\right)^2=\left(\frac{65}{4}\right)^2 \Rightarrow \mathrm{OM}=\frac{39}{4}$$

です。ここで、⊿OCMと⊿BNCは相似なので、

$$\mathrm{OM}:\mathrm{OC}=\mathrm{BN}:\mathrm{BC} \Rightarrow \frac{39}{4}:\frac{65}{4}=\mathrm{BN}:26 \Rightarrow \mathrm{BN}=\frac{78}{5}$$

となって、

$$\mathrm{BD}=2\mathrm{BN}=2\cdot\frac{78}{5}=\frac{156}{5}$$

です。また、∠BADは∠BODの円周角なので、それをαとすれば、

$$\frac{\angle\mathrm{BOD}}{2}=\angle\mathrm{BAD} \Rightarrow \angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{BAD}=\alpha$$

です。⊿BOCに余弦定理を適用すると、

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cos\alpha \Rightarrow 26^2=\left(\frac{65}{4}\right)^2+\left(\frac{65}{4}\right)^2-2\cdot\frac{65}{4}\cdot\frac{65}{4}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{7}{25}$$

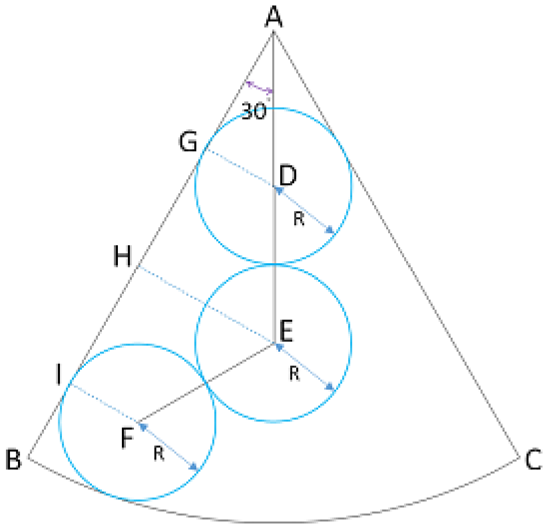
です。次に、$\mathrm{AB}=\mathrm{x}$として、⊿ABDに余弦定理を適用すると、

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{156}{5}\right)^2=\mathrm{x}^2+(88-26-26-\mathrm{x})^2-2\mathrm{x}(88-26-26-\mathrm{x})\left(-\frac{7}{25}\right)$$

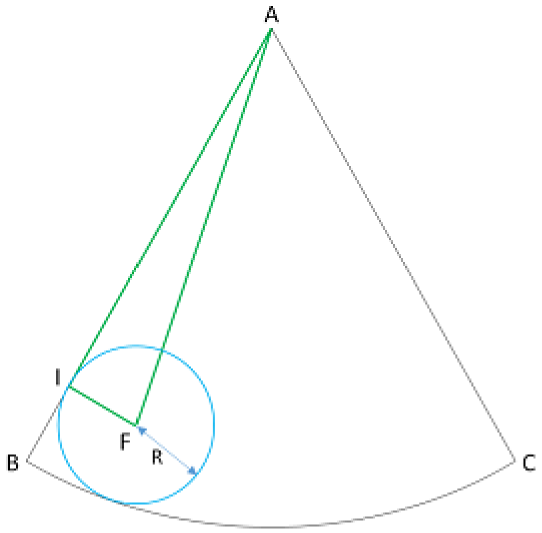
です。これを解いて、$\mathrm{x}=8,28$です。以上より、求める辺の長さは$(AB,DA)=(8,28)(28,8)$です。

追加問題1



左図のように、甲の半径をRとし、その中心D、E、FからABに垂直に下した点をG、H、Iとすると、

$$\mathrm{AI} = \mathrm{AG} + \mathrm{GH} + \mathrm{HI}$$
$$= \frac{\mathrm{DG}}{\tan 30^\circ} + \mathrm{DE}\cos 30^\circ + \mathrm{EF}\cos 30^\circ$$
$$= \frac{\mathrm{R}}{\tan 30^\circ} + \mathrm{R}\cos 30^\circ + \mathrm{R}\cos 30^\circ$$
$$\Rightarrow \mathrm{AI} = 3\sqrt{3}\mathrm{R} \cdots ①$$



また、⊿AFIに三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{AI}^2 + \mathrm{FI}^2 = \mathrm{AF}^2$$
$$\Rightarrow \mathrm{AI}^2 + \mathrm{R}^2 = (1-\mathrm{R})^2$$
$$\Rightarrow \mathrm{AI}^2 = 1 - 2\mathrm{R} \cdots ②$$

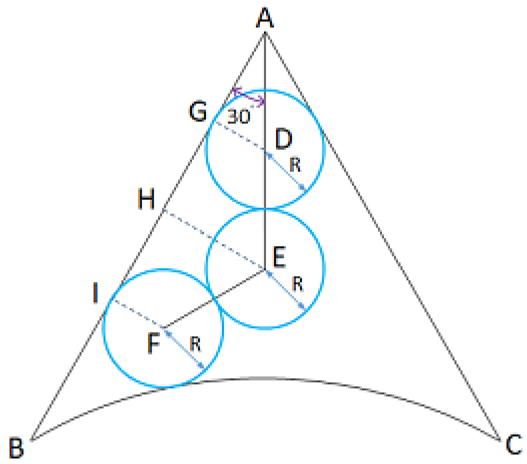
です。①②を解くと、

$$\mathrm{R} = \frac{\pm 2\sqrt{7} - 1}{27}$$

ですが、$\mathrm{R} > 0$なので、$\mathrm{R} = \frac{2\sqrt{7}-1}{27}$が適切です。

以上より、甲の半径は$\frac{2\sqrt{7}-1}{27}$です。

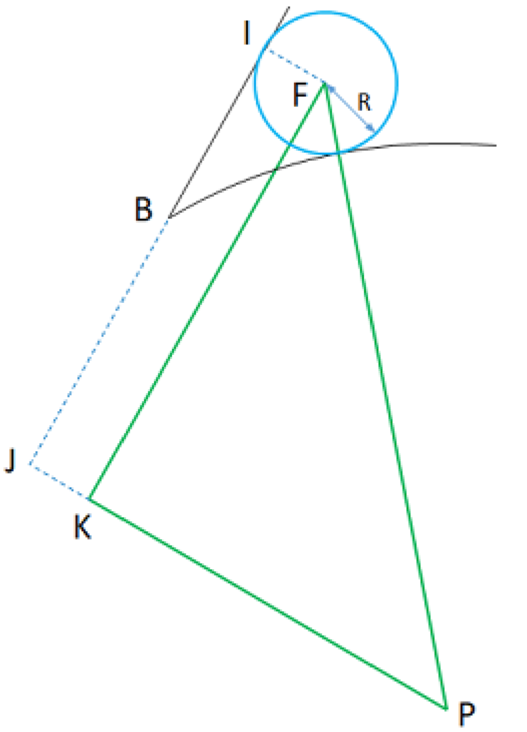
追加問題2



左図のように、甲の半径をRとし、その中心D、E、FからABに垂直に下した点をG、H、Iとすると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AI} &= \mathrm{AG} + \mathrm{GH} + \mathrm{HI} \\
&= \frac{\mathrm{DG}}{\tan 30^\circ} + \mathrm{DE}\cos 30^\circ + \mathrm{EF}\cos 30^\circ \\
&= \frac{\mathrm{R}}{\tan 30^\circ} + \mathrm{R}\cos 30^\circ + \mathrm{R}\cos 30^\circ
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \mathrm{AI} = 3\sqrt{3}\mathrm{R} \cdots ①$$



また、弧BCの中心をPとして、直線ABに垂直に下した点をJ、FからPJに垂直に下した点をKとします。そして、⊿PFKに三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{FK}^2 + \mathrm{KP}^2 = \mathrm{FP}^2$$

です。ここで、

$$\mathrm{FK} = \mathrm{AJ} - \mathrm{AI} = 1 + \frac{1}{2} - \mathrm{AI} = \frac{3}{2} - \mathrm{AI}$$

$$\mathrm{KP} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{R}$$

$$\mathrm{FP} = 1 + \mathrm{R}$$

なので、

$$\left(\frac{3}{2} - \mathrm{AI}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{R}\right)^2 = (1 + \mathrm{R})^2 \cdots ②$$

となります。

①②を解くと

$$\mathrm{R} = \frac{5\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{2}\sqrt{11 + 5\sqrt{3}}}{27}$$

ですが、$\frac{5\sqrt{3}+1+\sqrt{2}\sqrt{11+5\sqrt{3}}}{27} > \frac{1}{2}$なので不適です。よって、$\mathrm{R} = \frac{5\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\sqrt{11+5\sqrt{3}}}{27}$です。

以上より、甲の半径は$\frac{5\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\sqrt{11+5\sqrt{3}}}{27}$です。