446 解答　よふかしのつらいおじさん

問題 1

x、α を図のようにおきます。

余弦定理を用います。

△OAB

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \angle AOB \quad \to \quad 9 = 2x^2 - 2x^2 \cos \alpha$

$\to \quad \boldsymbol{2x^2 \cos \alpha = 2x^2 - 9} \quad \cdots \quad (1)$

△OBC

$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cos \angle BOC \quad \to \quad 1 = 2x^2 - 2x^2 \cos(90° - \alpha)$

$\to \quad 2x^2 \cos(90° - \alpha) = 2x^2 - 1 \quad \to \quad \boldsymbol{2x^2 \sin \alpha = 2x^2 - 1} \quad \cdots \quad (2)$

式(1)、(2)を 2 乗して辺々加えると、

$4x^4 \cos^2 \alpha + 4x^4 \sin^2 \alpha = (4x^4 - 36x^2 + 81) + (4x^4 - 4x^2 + 1)$

$\to \quad 4x^4 = 8x^4 - 40x^2 + 82 \quad \to \quad 2(x^2)^2 - 20x^2 + 41 = 0$

$\to \quad x^2 = \dfrac{10 \pm \sqrt{18}}{2}$

これを式(1)に代入して $\cos \alpha$ を調べると、

$2x^2 \cos \alpha = 2x^2 - 9 \quad \to \quad \cos \alpha = \dfrac{2x^2 - 9}{2x^2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{18} - 9}{10 \pm \sqrt{18}} = \dfrac{1 \pm \sqrt{18}}{10 \pm \sqrt{18}}$

α が鋭角より余弦が正の値なので、復号は正です。

つまり、$\left(x^2 = \frac{10+\sqrt{18}}{2}\right)$

$\cos \alpha = \dfrac{1 + \sqrt{18}}{10 + \sqrt{18}} \times \dfrac{10 - \sqrt{18}}{10 - \sqrt{18}} = \dfrac{-8 + 9\sqrt{18}}{82} = \sin(90° - \alpha)$

次に、式(2)に代入して $\sin \alpha$ を求めます。

$2x^2 \sin \alpha = 2x^2 - 1$

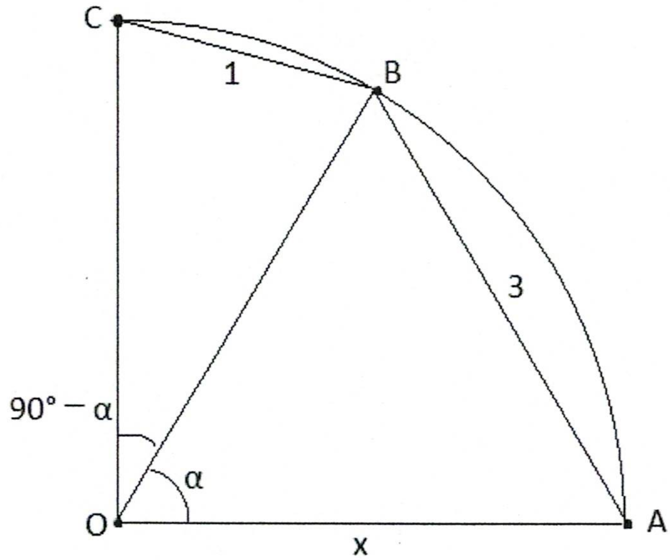
$\to \quad \sin \alpha = \dfrac{2x^2 - 1}{2x^2} = \dfrac{10 + \sqrt{18} - 1}{10 + \sqrt{18}} = \dfrac{72 + \sqrt{18}}{82}$

よって、四角形 OABC の面積 S は、

$S = \Delta OAB + \Delta OBC = \dfrac{1}{2} OA \cdot OB \sin \alpha + \dfrac{1}{2} OB \cdot OC \sin(90° - \alpha)$

$= \dfrac{1}{2} x^2 \times \dfrac{72 + \sqrt{18}}{82} + \dfrac{1}{2} x^2 \times \dfrac{-8 + 9\sqrt{18}}{82} = \dfrac{1}{2} x^2 \left(\dfrac{72 + \sqrt{18}}{82} + \dfrac{-8 + 9\sqrt{18}}{82} \right)$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{10 + \sqrt{18}}{2} \times \dfrac{32 + 5\sqrt{18}}{41} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{410 + 82\sqrt{18}}{41} = \dfrac{5 + \sqrt{18}}{2} = \dfrac{5 + 3\sqrt{2}}{2}$



問題 2
図のように図形を配置します。
AB、AC、AD の長さをそれぞれ p、q、r とします。

△OBC に余弦定理を用いると、

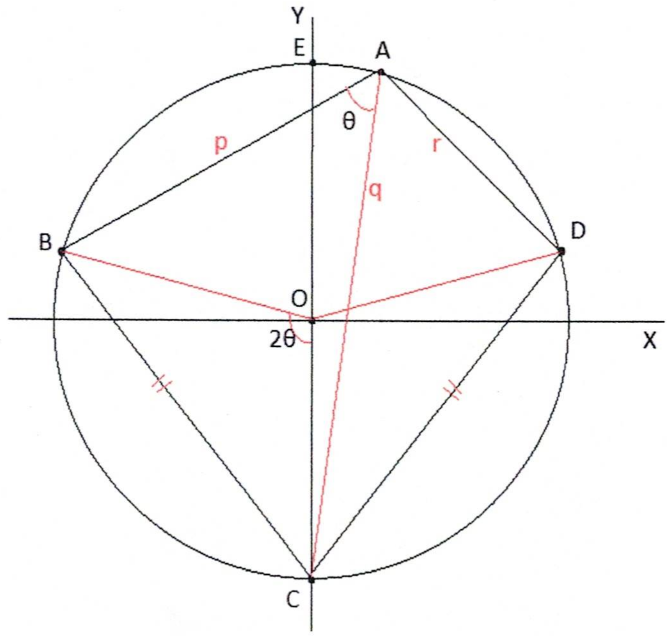
$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC\cos 2\theta \quad \rightarrow \quad 26^2 = 2\left(\frac{65}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{65}{4}\right)^2 \cos 2\theta$$

$$\rightarrow \quad 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cos 2\theta \quad \rightarrow \quad \cos 2\theta = \frac{\frac{25}{16} - 2}{\frac{25}{16}} = \frac{-7}{25}$$

$$\rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1 - \frac{7}{25}}{2} = \frac{9}{25} \quad \rightarrow \quad \boxed{\cos\theta = \frac{3}{5}}$$

ついでに、$\cos^{-1}\left(\frac{-7}{25}\right) = 106.26\cdots°$ なので、
∠XOB＝270° −106.26･･･＝163.73･･･° です。
よって、点 B の座標は、

$$B\left(\frac{65}{4}\cos 163.73\cdots°, \frac{65}{4}\sin 163.73\cdots°\right) = \left(-\frac{78}{5}, \frac{91}{20}\right) = (-15.6, 4.55)$$



□ABCD の周囲の長さが 88 なので、p ＋ r ＝88－2×26＝36 です。
△ABC に余弦定理を使います。

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\theta \;\rightarrow\; 26^2 = p^2 + q^2 - \frac{6}{5}pq$$

△ACD に余弦定理を使います。

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD\cos\theta \;\rightarrow\; 26^2 = q^2 + r^2 - \frac{6}{5}qr$$

$$\begin{cases} p + r = 36 & \cdots\ (1) \\ 26^2 = p^2 + q^2 - \frac{6}{5}pq & \cdots\ (2) \\ 26^2 = q^2 + r^2 - \frac{6}{5}qr & \cdots\ (3) \end{cases}$$

(1)の r を(3)に入れて(r の消去)、

$$26^2 = q^2 + r^2 - \frac{6}{5}qr \;\rightarrow\; 26^2 = q^2 + (36-p)^2 - \frac{6}{5}q(36-p)$$

$$\rightarrow\; 26^2 = q^2 + 36^2 - 72p + p^2 - \frac{216}{5}q + \frac{6}{5}pq$$

この式から(2)を引くと、

$$ 26^2 = q^2 + 36^2 - 72p + p^2 - \frac{216}{5}q + \frac{6}{5}pq$$

$$-)\ 26^2 = p^2 + q^2 - \frac{6}{5}pq$$

$$0 = 36^2 - 72p - \frac{216}{5}q + \frac{12}{5}pq \;\rightarrow\; 0 = 108 - 6p - \frac{18}{5}q + \frac{1}{5}pq$$

この式から q について解くと、

$$0 = 108 - 6p - \frac{18}{5}q + \frac{1}{5}pq \;\rightarrow\; 6(p-18) = \frac{q}{5}(p-18)$$

もし、p＝18 とすると、(1)より p ＝ r (＝18)
図の BE(p)の距離を調べると、

$$BE=\sqrt{\left(-\frac{78}{5}-0\right)^2+\left(\frac{91}{20}-\frac{65}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{6084}{25}+\frac{13689}{100}}=\sqrt{\frac{1521}{4}}=\frac{39}{2}=19.5>18$$

より、$p\neq 18$ であることが解ります。
よって、(p－18)で約して、

$$6(p-18)=\frac{q}{5}(p-18)\ \rightarrow\ q=30$$

これを(2)に入れて、

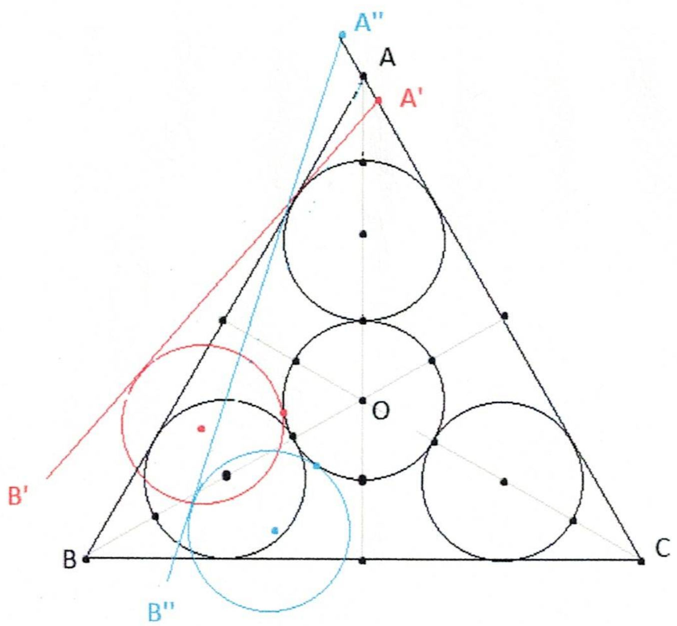
$$26^2=p^2+q^2-\frac{6}{5}pq\ \rightarrow\ 26^2=p^2+30^2-\frac{6}{5}p\times 30\ \rightarrow\ p^2-36p+224=0$$

$$\rightarrow\ p=18\pm\sqrt{18^2-224}=18\pm 10=28,8$$

以上から、
(AB,DA)＝(8,28)、(28,8)

追加問題
前 445 回の追加問題 1 で分かることですが、正三角形内に図のように
4 個の円甲が配置されるとき、各中線は各円の周、中心により 6 等分されています。
中央の円甲の周の 3 等分点に 3 個の円甲が外接しています。
3 等分点を外れると、∠BAC≠60° となります。

追加問題の 1，2 の 4 個の円甲からなる図形は互いに相似の関係にあります。



追加問題 1

円甲の半径を k とします。
LM の長さを x とします。

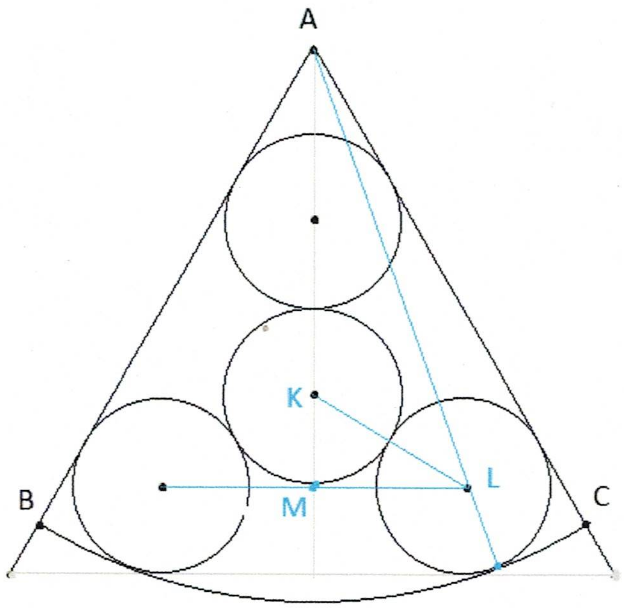
直角三角形 KLM に三平方の定理を用いると、

$KL^2 = LM^2 + MK^2 \quad \to \quad (2k)^2 = x^2 + k^2 \quad \to \quad x^2 = 3k^2 \quad \to \quad LM = \sqrt{3}k$

直角三角形 ALM に三平方の定理を用いると、

$AL^2 = LM^2 + MA^2 \quad \to \quad (1-k)^2 = \left(\sqrt{3}k\right)^2 + (5k)^2 \quad \to \quad 27k^2 + 2k - 1 = 0$

$\to \quad k = \dfrac{-1+\sqrt{1+27}}{27} = \dfrac{2\sqrt{7}-1}{27} (= 0.1578\cdots > 0)$



追加問題 2
円甲の半径を k とします。

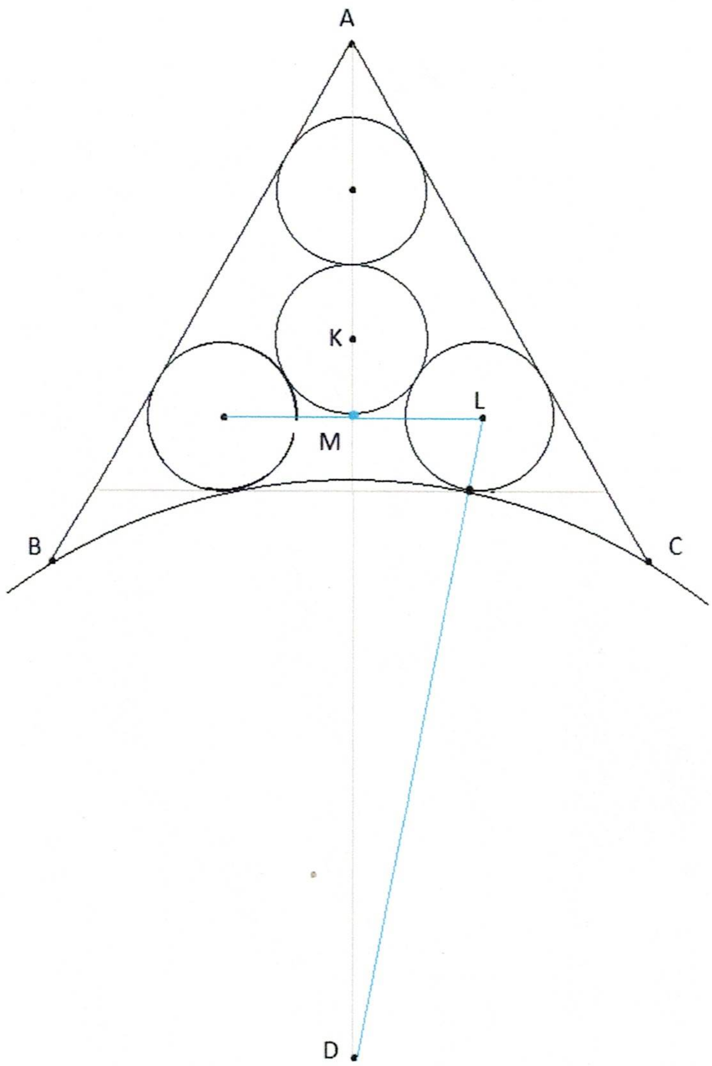
問題 1 と同様に$LM = \sqrt{3}k$ です。
$AD = \sqrt{3}$ です。

直角三角形 DLM に三平方の定理を用いると、

$DL^2 = LM^2 + MD^2 \quad \to \quad (1+k)^2 = \left(\sqrt{3}k\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 5k\right)^2$

$\to \quad 27k^2 - 2\left(1+5\sqrt{3}\right)k + 2 = 0$

$$\to \quad k = \frac{1+5\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(1+5\sqrt{3}\right)^2 - 54}}{27} = \begin{cases} \dfrac{1+5\sqrt{3}+\sqrt{22+10\sqrt{3}}}{27} (= 0.5900\cdots) \\ \dfrac{1+5\sqrt{3}-\sqrt{22+10\sqrt{3}}}{27} (= 0.1255\cdots) \end{cases}$$


A
K
L
M
B
C
D