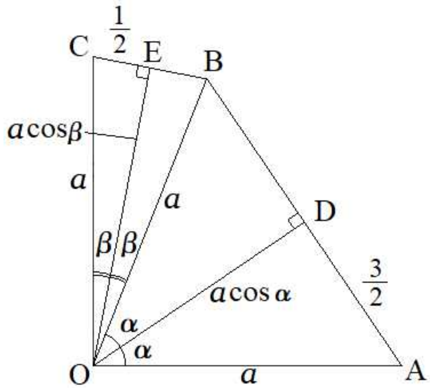
## ● 問題 446 解答＜三角定規＞

［問題１］




AB の中点を D, BC の中点を E とし, OA ＝ OB ＝ OC ＝ $a$,

∠ AOD ＝∠ BOD ＝ $\alpha$ , ∠ BOE ＝∠ COE ＝ $\beta$ とする。

このとき，OD＝$a\cos\alpha$，OE＝$a\cos\beta$，$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ …①

また，$a\sin\alpha=\frac{3}{2}$，$a\sin\beta=\frac{1}{2}$ より，$a=\frac{3}{2\sin\alpha}=\frac{1}{2\sin\beta}$ …②

これらのもとで,

四辺形OABC$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot a\cos\alpha+\frac{1}{2}\cdot1\cdot a\cos\beta$

$$=\frac{a}{2}(3\cos\alpha+\cos\beta)=\frac{a}{2}\left(3\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\quad(\because①)$$

$$=\frac{a}{2}\left(3\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)\right)=\frac{a}{4}((6+\sqrt{2})\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{4}\left((6+\sqrt{2})\frac{3}{2\tan\alpha}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\ \cdots③\quad(\because②)$$

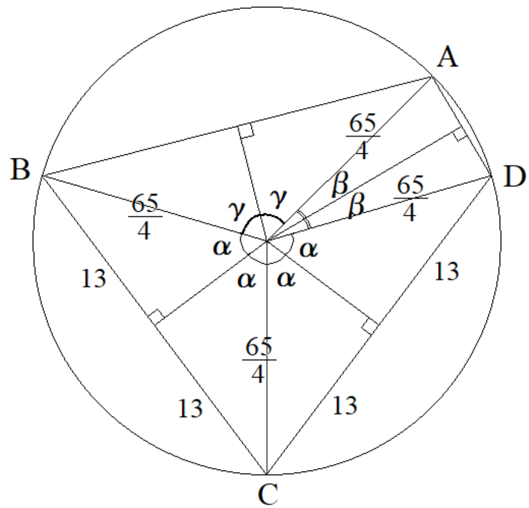
さらに，$\sin\alpha:\sin\beta=3:1$ より

$$\sin\alpha=3\sin\beta=3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

$$\therefore\ (2+3\sqrt{2})\sin\alpha=3\sqrt{2}\cos\alpha,\quad\therefore\ \frac{1}{\tan\alpha}=\frac{2}{3\sqrt{2}}+1=\frac{3+\sqrt{2}}{3}\ \cdots④$$

④を③に代入し，③$=\frac{3}{8}\left((6+\sqrt{2})\frac{3+\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}(5+3\sqrt{2})}$ …[答]

［問題２］ 図のように角 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ を定めると,




$$\sin\alpha=\frac{13}{65/4}=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\quad\cdots①$$

$$2\alpha+\beta+\gamma=\pi\quad\cdots②$$

また，題意より

$$\frac{65}{4}(\sin\beta+\sin\gamma)=18\quad\therefore\ \sin\beta+\sin\gamma=\frac{72}{65}\quad\cdots③$$

②より $\sin(\beta+\gamma)=\sin(\pi-2\alpha)=\sin2\alpha$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}\quad\cdots④$$

$$\therefore\ \beta+\gamma=\sin^{-1}\frac{24}{25}$$

$$\therefore\ \sin\gamma=\sin\left(\sin^{-1}\frac{24}{25}-\beta\right)$$

$$=\frac{24}{25}\cos\beta-\cos\left(\sin^{-1}\frac{24}{25}\right)\sin\beta=\frac{24}{25}\cos\beta-\frac{7}{25}\sin\beta\quad\cdots⑤$$

③⑤より $\frac{24}{25}\cos\beta+\frac{18}{25}\sin\beta=\frac{72}{65}\quad\therefore\ \frac{4}{5}\cos\beta+\frac{3}{5}\sin\beta=\frac{12}{13}$

$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13},\ \alpha+\beta=\sin^{-1}\frac{12}{13}$$

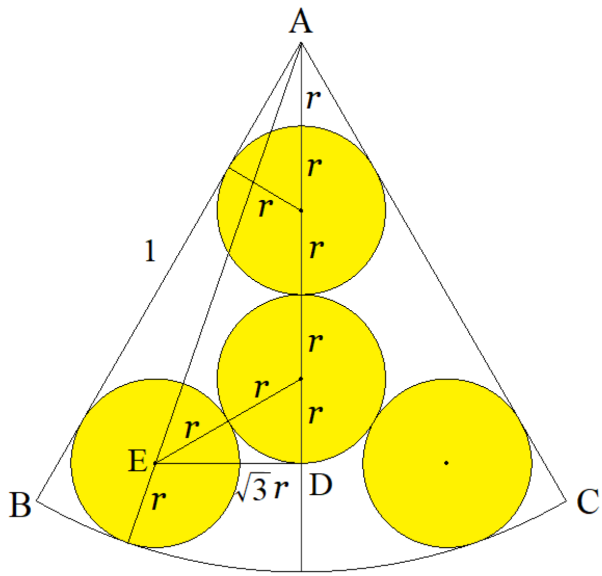
$$\therefore\ \sin\beta=\sin\left(\sin^{-1}\frac{12}{13}-\alpha\right)=\frac{12}{13}\cos\alpha-\cos\left(\sin^{-1}\frac{12}{13}\right)\sin\alpha=\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{65}$$

このとき $\cos\beta=\frac{63}{65}$。⑤より $\sin\gamma=\frac{24}{25}\cdot\frac{63}{65}-\frac{7}{25}\cdot\frac{16}{65}=\frac{56}{65}\quad\cdots⑥$

以上より，$AB=2\cdot\frac{65}{4}\sin\gamma=2\cdot\frac{65}{4}\cdot\frac{56}{65}=\mathbf{28}$, $AD=2\cdot\frac{65}{4}\sin\beta=2\cdot\frac{65}{4}\cdot\frac{16}{65}=\mathbf{8}$ …[答]

● 追加問題

［問題１］右図のように各点を定める。




求める甲円の半径を $r$ とすると，

$AD=5r$, $DE=\sqrt{3}\,r$, $AE=1-r$　だから

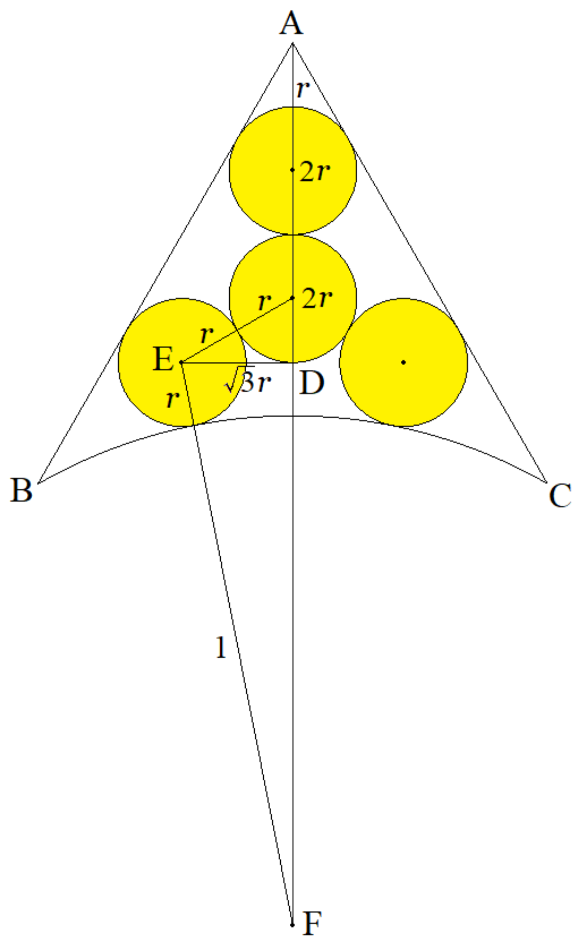
$(5r)^2+(\sqrt{3}\,r)^2=(1-r)^2$

整理して　$27r^2+2r-1=0$

$r>0$ でこれを解いて，$r=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{7}-1}}{\mathbf{27}}$　…[答]

$(=0.158\cdots)$

［問題２］右図のように各点を定める。




求める甲円の半径を $r$ とすると，

$ED=\sqrt{3}\,r$, $DF=AF-AD=\sqrt{3}-5r$, $EF=1+r$　だから

$(\sqrt{3}\,r)^2+(\sqrt{3}-5r)^2=(1+r)^2$

整理して　$27r^2-2(1+5\sqrt{3})r+2=0$

$r<\dfrac{1}{2}$ でこれを解いて，

$r=\dfrac{\mathbf{1+5\sqrt{3}-\sqrt{22+10\sqrt{3}}}}{\mathbf{27}}$　…[答]

$(=0.125\cdots)$